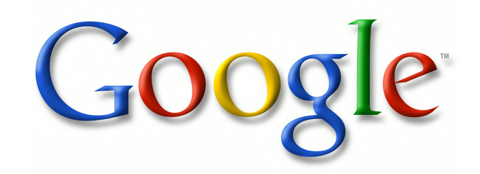
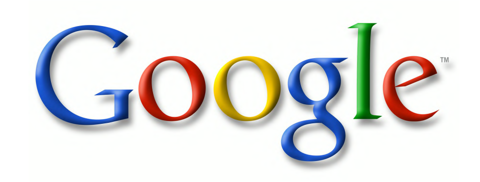
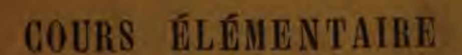






COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE

(CINÉMATIQUE)

PAR

ÉDOUARD COLLIGNON

Ingénieur des Ponts et Chaussées

OUVRAGE RÉPONDANT

aux programmes officiels de 1866

POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(TROISIÈME ANNÉE — PREMIÈRE PARTIE)

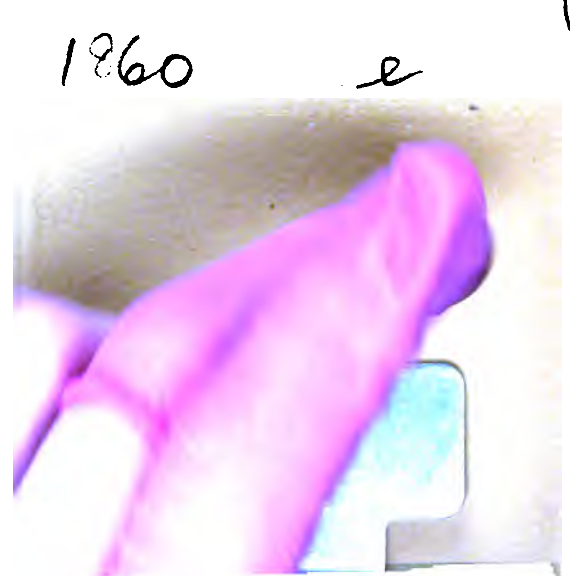


PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77

1868





ıE

UE

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE

(CINÉMATIQUE)

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE

(CINÉMATIQUE)

PAR

ÉDOUARD COLLIGNON
INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

OUVRAGE RÉPONDANT
aux programmes officiels de 1866
POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL
(TROISIÈME ANNÉE — PREMIÈRE PARTIE)

PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET C[ie]
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77

1868

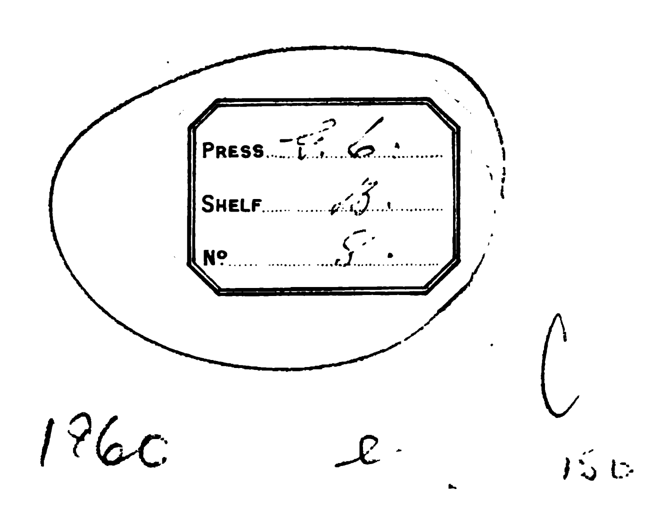


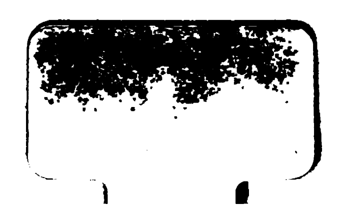
PRÉFACE

Le *Cours élémentaire de mécanique*, dont nous publions aujourd'hui la première partie, est principalement destiné aux élèves de l'enseignement secondaire spécial ; il s'adresse aussi aux personnes qui, possédant les éléments de la géométrie et de l'algèbre, mais n'ayant pas poussé plus loin leurs études préparatoires, désirent apprendre la mécanique rationnelle.

Les programmes officiels de 1866 reconnaissent au professeur le droit d'intervertir l'ordre des matières, et de commencer le cours par la cinématique, sauf à aborder plus tard l'étude des forces et de leurs effets. Cette marche est si naturelle, que nous n'avons pas hésité à l'adopter. Notre Cours comprendra donc trois parties : la *Cinématique*, la *Statique* et la *Dynamique*. Pour faire répondre cette division au partage réglementaire de l'enseignement entre les deux dernières années d'études, nous avons admis que la cinématique et la statique formeraient l'objet du cours de première année (c'est-à-dire de la troisième


600048650T


PRESS
SHELF
No



COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE

(CINÉMATIQUE)

au plan qui tend à le faire glisser suivant la ligne de plus grande pente.

Pressions exercées par un liquide sur le fond et sur les parois latérales d'un vase. — Centre de pression : remarquer qu'il est forcément au-dessous du centre de gravité.

Égalité de niveau dans les vases en communication.

Corps plongés. — Principe d'Archimède. — Conditions de stabilité.

Corps flottants. — Carène, déplacement, flottaison, centre de poussée ou centre de carène. — Arrimage : il détermine la position du centre de gravité du bâtiment en charge.

Si le flotteur incline, l'équilibre est stable ou instable, selon le sens du couple formé par le poids et la nouvelle poussée. — Cas très-simple d'une sphère non homogène. — Analogie entre sa stabilité sur l'eau et sa stabilité sur un plan horizontal.

Du mouvement en général.

Mouvement par rapport à l'espace. — Le mouvement est rectiligne ou curviligne. Exemples tirés de mécanismes qui fonctionnent journellement autour de nous : un seau qui descend au fond d'un puits, cheval qui suit la piste d'un manége, la roue d'un rémouleur, etc.

Mouvement alternatif. — Ex. : piston d'un corps de pompe.

Mouvement par rapport au temps. — Mouvement uniforme. — Ex. : une troupe militaire qui marche au pas ordinaire. — Une roue de moulin qui fait toujours le même nombre de tours dans le même temps.

Mouvement varié. — Ce que l'on entend par accélération ou ralentissement. — Ex. : trains de chemin de fer se rendant d'une station dans une autre.

Mouvement uniforme.

Vitesse dans le mouvement rectiligne uniforme. — On l'obtient en divisant le chemin parcouru par le temps employé à le parcourir. — Le choix de l'unité varie suivant les cas. — Exemples : nombre de mètres par seconde. — Nœud marin ; filer un nœud, c'est-à-dire marcher à raison de un mille à l'heure. — Exemples numériques dans lesquels on proposera successivement comme inconnu l'espace parcouru et la vitesse ou le temps. — Représentation graphique du mouvement uniforme.

Mouvement de rotation uniforme. — Notion de la vitesse d'après le nombre de tours ou de révolutions dans un temps donné. — Comparaison des angles décrits au temps employé à les décrire.

Vitesse angulaire dans un mouvement de rotation uniforme : on peut l'exprimer de diverses manières : — Nombre de degrés dont le corps tourne en une seconde ou de tours qu'il fait en une minute. Les divers points du corps tournant se meuvent uniformément suivant des circon-

férences de cercle. — La vitesse de chaque point peut être mesurée en mètres par seconde comme pour le mouvement rectiligne. — Les vitesses des points qui se meuvent autour d'un axe de rotation sont proportionnelles à leurs distances à cet axe. — Connaissant le nombre de tours par minute, calculer le chemin parcouru par un point, en une seconde, le long de la circonférence décrite. — Application à la scie circulaire.

Tendance des points d'un corps animé d'un mouvement de rotation à s'éloigner de l'axe. — Explication de quelques phénomènes. — Force centrifuge : elle est d'autant plus grande que la vitesse angulaire et le rayon sont plus grands, ou d'autant plus grande pour une même vitesse estimée le long de la circonférence décrite, que le rayon est plus petit. — Renversement d'une voiture à caisse élevée qui tourne trop brusquement.

Calculer les vitesses dont sont animées les zones terrestres dans leur mouvement autour de la ligne des pôles.

Nombreux exemples numériques pour bien faire comprendre les lois ci-dessus énoncées.

Mouvement varié.

Mouvement varié : — accéléré ou retardé. — Représentation graphique d'un mouvement varié. — Insister beaucoup pour que les élèves ne confondent pas la trajectoire du mobile avec la courbe qui représente la loi de son mouvement. — Exemples nombreux.

Vitesse dans le mouvement varié. — La vitesse que possède un corps à une époque quelconque du mouvement varié est celle avec laquelle il se mouvrait uniformément, si les forces auxquelles il est soumis cessaient d'agir. — Détermination graphique de la vitesse à un instant quelconque, connaissant la loi du mouvement. — Vitesse moyenne.

Mouvement uniformément varié. — Force accélératrice. — Force retardatrice. — Vitesse initiale, vitesse finale, vitesses extrêmes.

Le chemin parcouru d'un mouvement uniformément varié est la moitié du produit fait avec la somme des deux vitesses extrêmes et le temps estimé en secondes.

Du mouvement uniformément accéléré. — Étude des lois de la chute des corps à l'aide de l'appareil à cylindre tournant du général Morin. — Relation entre la hauteur de chute et le temps, la vitesse acquise et le temps, la vitesse et la hauteur de chute. — Valeurs numériques de l'espace parcouru pendant la première seconde de chute et de la vitesse acquise au bout de ce même temps, à Paris, à Londres, etc.

Une force constante communique à un mobile un mouvement uniformément accéléré. — Chute verticale.

Mouvement uniformément retardé d'un corps pesant lancé verticalement et de bas en haut.

Lois du mouvement que prend un corps abandonné à lui-même sur un plan incliné. Abstraction faite des frottements, la vitesse acquise dépend de la hauteur et non de la pente du plan.

Du mouvement relatif.

Principe de l'indépendance des mouvements simultanés constaté par l'observation. — Exemple d'un corps qui se meut uniformément; et en gne droite, sur un bateau qui descend lui-même d'un mouvement ·ectiligne et uniforme. — Le mouvement relatif de deux points n'est pas altéré quand on leur donne un mouvement commun d'entraînement rectiligne. Ex. : chute d'un objet dans l'intérieur d'un wagon de chemin de fer ou du bout d'un mât d'un bâtiment. — Composition des chemins. — Parallélogramme des espaces parcourus. — Mouvement parabolique d'un corps pesant lancé obliquement, obtenu par la composition du mouvement ascendant et descendant suivant la verticale, avec un mouvement de transport rectiligne et horizontal de cette ligne verticale.

DU TRAVAIL MÉCANIQUE.

Étude des machines à l'état de mouvement uniforme.

Indication des machines les plus usuelles : levier, treuil, etc. — Objet de l'emploi des machines : 1° vaincre une résistance; 2° déplacer le point d'application de cette résistance en sens contraire de son action ; exemples divers. La mesure industrielle d'un travail mécanique, élévation des fardeaux, sciage, limage, burinage, etc., dépend donc toujours de deux éléments : 1° effort développé ou vaincu; 2° chemin parcouru.

Le travail, tel qu'on le définit en mécanique, est la véritable mesure de l'activité des forces dans l'industrie; il est proportionnel à l'intensité de la force et au chemin parcouru selon la direction, et il est exprimé par leur produit. — Quantité de travail d'une force dont le point d'application ne se meut pas dans sa direction propre. — Travail d'une force tangente dans le mouvement de rotation.

Choix d'une unité de travail mécanique. — En France, c'est le kilogrammètre; quelquefois l'un de ses dérivés ou multiples.

Expression numérique de la mesure du travail d'une force en kilogrammètres. — L'homme qui, poussant une brouette, exerce constamment, *dans le sens du mouvement*, un effort de 50 kilogrammes et parcourt $0^m,50$ par seconde fait dans chaque seconde un travail mécanique de $50 \times 0,50 = 25$ kilogrammètres.

Principe de la transmission du travail dans les machines à l'état de mouvement uniforme.

La juxtaposition de pièces inertes ne peut créer ni force ni travail mécanique. — Nécessité d'un agent moteur. — Travail moteur. — Travail résistant.

Le travail moteur dépensé est égal au travail résistant produit. — Faire bien ressortir que la machine se borne à échanger le travail reçu, et qu'elle ne peut rendre plus qu'on ne lui donne. — Avec une dépense limitée de travail moteur, si grande qu'elle soit, l'homme ne peut jamais réaliser qu'un travail également limité. — *Ce que l'on gagne en force on le perd en chemin parcouru.*

Prendre successivement les machines les plus simples, et vérifier le principe précédent, en les supposant animées d'un mouvement uniforme.

Conséquences du principe de la transmission du travail relatives à la détermination du rapport de grandeur des forces qui se font équilibre sur une machine.

Le principe de la transmission du travail dans une machine susceptible de se mouvoir d'un mouvement uniforme étant une fois admis, on en déduit immédiatement un moyen simple de trouver le rapport de grandeur de deux forces qui se font équilibre par l'intermédiaire d'une machine de cette espèce.

Exemples choisis parmi les machines déjà étudiées. — Treuil. — On supposera que la puissance demeure tangente à la circonférence décrite par le bouton de la manivelle. — Exemples nouveaux : vis mobile dans un écrou fixe (presse à vis) qui ne peut prendre qu'un mouvement de rotation, agissant sur un écrou qui ne peut que s'avancer sans tourner; treuil différentiel, etc.

Balance à plateaux supérieurs ou balance de Roberval, actuellement employée dans le commerce.

Transmission du travail dans les machines animées d'un mouvement quelconque.

Le travail mécanique fait pour imprimer une vitesse à un corps est, en kilogrammètres, la moitié du produit de la masse et du carré de cette vitesse. — Force vive. — Prendre des exemples numériques pour faire comprendre la définition; exemple : le gaz produit par la combustion de la poudre qui imprime une vitesse de 294 mètres à un boulet de 24, dont la masse est 1,223, produit un travail mécanique de 52,855 kil. 614, c'est-à-dire une force vive égale à 105,711 kil. 228, etc. — Variation de la force vive dans la chute d'un corps suivant la verticale; — dans le mouvement parabolique.

Notions qui découlent du principe des forces vives pour la transmission du travail dans les machines. — Machines animées d'un mouvement uniforme; machines à mouvement périodique; machines animées d'un mouvement quelconque. — Pour cet examen succinct le professeur aura soin de choisir ses exemples dans l'industrie locale.— Emploi des volants qui servent à emmagasiner la force vive, tout en maintenant la vitesse générale entre des limites assez rapprochées l'une de l'autre.

Résumer dans une leçon récapitulative les notions acquises jusqu'ici sur l'inertie, les forces et les effets, soit d'équilibre, soit de mouvement, qu'elles peuvent produire.

Organes des machines.

Les machines sont des appareils propres à l'emploi des forces qu'exige un ouvrage déterminé.

Indiquer sommairement les organes que l'on distingue dans les machines : le récepteur, l'opérateur, les communicateurs, les supports, les modificateurs, les régulateurs et les restituteurs. Ex. : les ailes d'un moulin à vent, la manivelle d'un puits, les chaînes et les courroies qui embrassent deux roues, la poulie d'un puits où l'on puise l'eau par traction, la vanne et le déversoir d'un moulin hydraulique, les volants, etc.

Énumération et description succinctes des principaux organes propres à transmettre ou à transformer le mouvement dans les machines.

Guides. — Guides pour le mouvement de translation; tiges et œillets, languettes et rainures, glissières, roulettes ou galets avec ou sans gorges (roues à boudin des chemins de fer).

Guides pour le mouvement de rotation; arbres tournants, tourillons et coussinets, paliers, pivots et crapaudines, colliers pour arbres verticaux, couronnes de galets pour ponts tournants et plaques tournantes de chemins de fer.

Transmission du mouvement.

Les machines simples précédemment étudiées sont des organes de transmission de mouvement.

Variétés ou combinaisons de machines simples. — Leviers accouplés. — Palan sur palan. — Constater le rapport des chemins décrits par la main de l'homme et par le fardeau.

Transmission du mouvement circulaire d'un arbre à un autre, les axes étant dans le même plan, par contact de deux cylindres, par cordes, chaînes ou courroies sans fin, par engrenages. — Rapport des nombres de tours des arbres. — Équipages de roues.

Indications sommaires relatives au tracé pratique d'un engrenage.

— Pas de l'engrenage; creux, largeur, épaisseur et saillie des dents en fonte ou en bois.

Roues d'angle. — Rapport des nombres de tours des arbres qu'elles relient.

Cric. — Rapport des chemins décrits par le bouton de la manivelle et la tête de la crémaillère.

Vis et écrou. — Rapport du chemin parcouru par le bouton de la manivelle et par l'écrou ou la vis, suivant l'axe.

Vis tangente dite *sans fin*.

Faire application, à propos de ces exemples, du principe de la transmission du travail à la détermination du rapport des deux forces capables de se faire équilibre, connaissant le rapport des chemins que décrivent simultanément leurs points d'application.

Cric composé.

Cette dernière application montre, comme conséquence du principe de la transmission du travail, que si l'introduction d'un mécanisme réduit le chemin du point d'application de la résistance dans un certain rapport, la puissance est réduite dans le même rapport. — Applications numériques.

Transformation des mouvements.

Rectiligne continu en rectiligne continu. — Plan incliné. — Coin. — Poulies. — Moufles.

Rectiligne continu en circulaire continu, et réciproquement. — Bourriquet à cheval, — à manége. — Treuils divers. — Chèvres. — Sapines. — Vannage. — Roues des bateaux à vapeur. — Vis et son écrou. — Hélices. — Vilebrequin.

Circulaire continu en rectiligne alternatif. — Manivelle et sa bielle. — Pistons. — Relation géométrique des mouvements. — Exemples de quelques cames ou excentriques.

Circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu, — par simple roulement, — par engrenages, — par cordes ou courroies, — par le levier. — Rapports géométriques des vitesses.

Dans toutes ces transformations de mouvement, le professeur s'attachera à faire calculer le rapport du chemin parcouru par les points d'application du moteur et de la résistance, en choisissant le plus d'exemples possibles dans les machines de toute nature en usage dans la localité.

Résistance à l'action des forces.

Notion des résistances passives. — Pour entretenir une machine en mouvement, même sans produire aucun travail utile, il faut une dépense de travail moteur. — Dans la pratique, le travail utile est toujours moindre que le travail moteur. — *Impossibilité du mouvement perpétuel.*

Rendement d'une machine.

Diverses espèces de résistances passives.

Frottement, ou résistance au glissement : frottement au départ, frottement pendant le mouvement. — Simple énoncé de ses lois.

Le frottement est nuisible dans les machines en mouvement; le travail résistant qu'il occasionne absorbe une portion équivalente du travail moteur.

Mouvement et conditions d'équilibre d'un corps sur un plan incliné, en tenant compte du frottement. — Ce qu'on appelle angle de frottement. — Il varie suivant la nature des surfaces qui tendent à glisser l'une sur l'autre. — Expériences. — Données numériques sur le frottement.

Résistance au roulement, comment elle se produit. — Son intensité.

Roideur des cordes. — Résistance et, par suite, perte de force qu'elle occasionne.

Résistance des milieux. — Exemples de quelques milieux.

Moyens divers employés pour diminuer l'influence des résistances passives dans les machines en mouvement. — Diminution de cette influence par les dimensions et les formes des pièces qui frottent (tourillons), et par le graissage des parties frottantes. — Substitution du roulement au glissement : roulettes galets.

Utilisation de la résistance au glissement comme point d'appui. — Marche de l'homme. — Vis de pression. — Notion de l'adhérence. — Il n'y a pas de chemin parcouru par le point d'application de la résistance. — Pas de perte de travail.

Application du travail dû au frottement pour un travail utile. — Frein.

Étude particulière de la machine à vapeur comme application des principes expliqués dans le cours de cette année.

Principe et composition de la machine à vapeur. — Un cylindre et un piston sur les faces duquel s'exercent des pressions inégales dont la plus forte est alternativement d'un côté, puis de l'autre. — Admission, condensation.

De là un mouvement rectiligne alternatif.

Tiroir de distribution mis en mouvement par la machine elle-même. — Pompe à air. — Rôle de ces organes accessoires.

La transformation du mouvement du piston en circulaire continu et la mise en marche de divers organes accessoires, exécutée automatiquement par la machine elle-même, complètent la machine à vapeur.

Détente de la vapeur; son utilité; moyens de la produire.

Classification des machines à vapeur selon le régime de la pression; de la détente et de la condensation, et appropriations correspondantes à des besoins spéciaux.

Description de la machine à basse pression de Watt. — Parallélogramme articulé. — Excentrique.

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE

INTRODUCTION.

1. Un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace. Un corps est au contraire en *repos* lorsqu'il conserve indéfiniment la position qu'il occupe à un certain instant. Dans ces deux définitions entre la considération du *temps*.

L'idée de *temps* est une idée première qu'on ne peut définir et que tout le monde possède; il nous suffit ici d'observer qu'une durée quelconque est une portion du temps, commençant à un certain instant et se terminant à un autre instant; l'instant est à la durée ce que le point géométrique est à la longueur d'une ligne. On conçoit très-bien ce que sont deux durées égales, et par suite ce qu'est une durée double, triple, ou moitié d'une autre. En un mot, le temps est susceptible de mesure comme toute autre grandeur, et on évalue une durée en donnant le rapport de cette durée à une unité arbitrairement choisie.

La seconde, la minute, l'heure, le jour, l'année, sont les unités de temps que l'on adopte habituellement. Le jour et l'année, durées définies par les mouvements naturels des astres, sont les

unités fondamentales. La seconde, la minute et l'heure sont des fractions connues du jour; on les évalue à l'aide des appareils chronométriques, tels qu'une montre, un sablier...

Le phénomène du mouvement fait donc intervenir deux ordres d'idées bien distincts : le temps et les grandeurs géométriques qui fixent la position du corps mobile. Ce n'est pas tout. L'expérience nous apprend que pour mettre en mouvement un corps qui est en repos, il faut y appliquer un certain effort; qu'il faut de même déployer un certain effort pour empêcher, dans certains cas, un mouvement de se produire; c'est ce qui a lieu, par exemple, quand la main soutient un poids qui tomberait si on l'abandonnait à lui-même. Des faits analogues se renouvellent constamment dans la vie pratique, et conduisent à la notion de *force*, notion nouvelle, comme celle de *temps*. La force doit être considérée comme une cause capable de mettre en mouvement un corps en repos, de faire rentrer dans le repos un corps en mouvement, de maintenir en repos un corps qui est sollicité à se mouvoir par d'autres forces, etc... Les forces sont très-diverses par leur nature; par exemple, la force musculaire que développe un animal est, du moins en apparence, d'une autre nature que les forces qui se manifestent dans le mouvement des planètes. Mais les forces, quelle qu'en soit la diversité, sont comparables les unes avec les autres et susceptibles d'évaluation numérique. La mécanique n'a pas pour objet l'étude de leur nature intime; elle ne s'occupe que des caractères communs à toutes, et pour nous, une force sera regardée comme complétement connue quand nous connaîtrons son *point d'application*, sa *direction* et son *intensité*, sans que nous cherchions à pénétrer plus avant dans la recherche de sa nature. Ces notions seront, du reste, éclaircies dans la suite du cours, lorsque nous étudierons les principes fondamentaux de la mécanique.

2. La *Mécanique* est la science du mouvement et des forces qui le produisent ou le détruisent. Elle se divise en trois parties.

La première, appelée *cinématique* par Ampère, a pour objet l'étude du mouvement, abstraction faite des forces qui peuvent le produire ; on y considère les corps comme des figures géométriques mobiles et déformables; la cinématique n'admet dans ses raisonnements que les quantités géométriques et le temps, ce qui

a fait dire d'elle qu'elle est une sorte de *géométrie à quatre dimensions*.

La seconde partie de la mécanique est la *statique :* c'est la science de l'*équilibre*. On entend par *équilibre* l'état d'un corps soumis à la fois à plusieurs forces qui se contre-balancent, et qui par suite le laissent en repos s'il y est déjà. Un poids que l'on porte à la main, et que l'on maintient en repos malgré l'action de la pesanteur est en équilibre sous cette action de la pesanteur, qui tend à le faire descendre, et sous l'action contraire de l'effort de la main qui tend à le faire monter. La statique étudie les conditions auxquelles diverses forces doivent satisfaire pour que l'équilibre ait lieu.

En général, un corps soumis à plusieurs forces agissant à la fois se met en mouvement; l'équilibre des forces est le cas particulier très-remarquable où le repos du corps persiste malgré les tendances diverses que le corps subit, et en vertu de la coexistence de ces tendances contradictoires; ce cas particulier, plus simple que le cas général où le mouvement est effectivement produit, est l'objet spécial de la statique.

La troisième partie de la mécanique est la *dynamique* ou science des effets de mouvement des forces. Nous venons de voir que la statique y rentre à titre de cas particulier.

On isole ordinairement, sous les noms d'*hydrostatique* et d'*hydrodynamique*, l'étude de l'équilibre et du mouvement des fluides.

Nous nous proposons dans cet ouvrage d'exposer les principes de la mécanique d'une manière tout à fait élémentaire, en commençant par la cinématique, suivant l'usage généralement adopté. Auparavant nous rappellerons quelques propositions générales sur lesquelles nous aurons à appuyer nos raisonnements.

PRINCIPES DE LA THÉORIE

DES LIMITES ET DES INFINIMENT PETITS.

3. Nous ferons fréquemment usage dans ce cours des quantités *infiniment petites*. Il est utile d'en donner ici une définition bien précise.

Une quantité constante est la *limite* d'une quantité variable, lorsque

la différence entre la quantité variable et la quantité constante peut être rendue plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée, aussi petite qu'on voudra.

On a un exemple de limite dans l'arithmétique élémentaire, en considérant le nombre variable dont les valeurs successives sont représentées par les nombres décimaux

0,9
0,99
0,999
0,9999,
....

Cette quantité variable a pour limite l'unité; car la différence entre la quantité variable et l'unité est successivement

0,1
0,01
0,001
0,0001,
....

et elle peut être rendue moindre que tout nombre donné, quelque petit qu'il soit, en prenant un nombre de 9 suffisamment grand dans le nombre décimal 0,9999.... On peut donc poser l'égalité

$$1 = \lim. (0,9999....)$$

On démontre d'une manière analogue qu'une fraction décimale périodique a pour limite la fraction ordinaire qui l'engendre par la division.

En géométrie, la surface du cercle est la limite de la surface d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, à mesure que le nombre de côtés de ce polygone augmente. En effet, la surface du cercle est comprise entre la surface d'un polygone régulier inscrit et la surface d'un polygone régulier circonscrit du même nombre de côtés. Or il est aisé de démontrer que la différence entre le polygone circonscrit et le polygone inscrit peut être rendue aussi petite qu'on veut en prenant un nombre de côtés suffisamment grand. Il en est de même, à plus forte raison, de la différence entre le cercle et le polygone inscrit, et par suite le cercle, quantité constante, est la limite du polygone inscrit, quantité qui varie avec le nombre de côtés attribué à ce polygone.

On exprime quelquefois cette proposition en d'autres termes, en disant que le cercle se confond avec un polygone régulier inscrit d'un nombre infini de côtés : manière abrégée de dire que le cercle est la limite du polygone inscrit, à mesure que le nombre des côtés augmente, de sorte que l'erreur commise en confondant le cercle avec le

polygone inscrit est d'autant plus petite que le nombre des côtés du polygone est plus grand.

4. Une quantité *infiniment petite* est une quantité variable qu'on peut rendre aussi petite qu'on voudra, ou qui a zéro pour limite. La différence entre une quantité variable et sa limite est donc infiniment petite.

Une quantité variable est infiniment petite par rapport à une autre quantité variable, lorsque le rapport de la première à la seconde, rapport généralement variable, est lui-même infiniment petit. On dit dans le même cas que la seconde quantité est infiniment grande par rapport à la première.

Lorsque deux quantités variables sont à la fois infiniment petites, leur rapport peut rester fini. On dira, par exemple, que ces deux quantités infiniment petites sont égales si leur rapport a pour limite l'unité. Prenons pour exemple un arc de cercle AB ; soit O son centre. Si l'on fait décroître indéfiniment l'angle au centre BOA, l'arc BCA décroîtra indéfiniment, et la corde BA, qui est toujours moindre que l'arc sous-tendu, décroîtra elle-même jusqu'à zéro. La corde BA et l'arc BCA sont donc à la fois infiniment petits. Or nous allons démontrer que la limite de leur rapport est l'unité. En effet, menons, perpendiculairement à la corde AB, le rayon OC qui passera par le point I, milieu de BA, et par le point C, milieu de l'arc BCA; puis menons en C la tangente A′ B′, jusqu'à la rencontre des rayons OB et OA prolongés. On sait que l'arc BCA est plus petit que la droite B′ A′; donc le rapport $\frac{BCA}{BA}$, qui est plus grand que l'unité, est moindre que le rapport $\frac{B'A'}{BA}$, ou que le rapport égal $\frac{OC}{OI}$. De là la double inégalité :

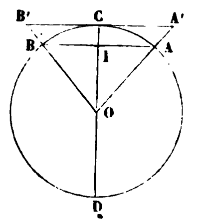


Fig. 1.

$$1 < \frac{BCA}{BA} < \frac{OC}{OI}.$$

A mesure que l'angle au centre diminue, la flèche CI de l'arc diminue elle-même, et elle a zéro pour limite lorsque l'angle au centre devient nul. La distance OI augmente quand l'angle BOA diminue, et a pour limite le rayon OC. A la limite, le rapport $\frac{OC}{OI}$ devient donc égal

à l'unité, et par suite $\frac{\text{BCA}}{\text{BA}}$, toujours compris entre ce rapport et l'unité, devient lui-même égal à l'unité. Nous pouvons donc poser l'égalité

$$\lim. \frac{\text{arc BCA}}{\text{corde BA}} = 1.$$

5. La même figure nous montre une quantité infiniment petite par rapport à une autre quantité infiniment petite elle-même. La flèche CI est infiniment petite, non-seulement d'une manière absolue, mais encore par rapport à la corde AB, ou à la moitié BI de cette corde. Ces deux quantités CI, BI, se réduisent ensemble à zéro quand l'angle BOA devient nul. Mais la quantité CI est infiniment petite par rapport à la quantité BI, parce que le rapport variable $\frac{\text{CI}}{\text{BI}}$ a zéro pour limite quand les quantités CI et BI deviennent nulles. En effet, prolongeons le rayon CO jusqu'au point D, où il rencontre la circonférence à laquelle appartient l'arc ACB. Nous savons que dans le cercle, le carré de la demi-corde BI, perpendiculaire au diamètre CD, est égal au produit $\text{CI} \times \text{ID}$ des segments interceptés sur le diamètre ; donc

$$\frac{\text{CI}}{\text{BI}} = \frac{\text{BI}}{\text{ID}}.$$

Faisons décroître indéfiniment l'angle BOA; BI décroîtra indéfiniment, tandis que ID croîtra et deviendra égal au diamètre CD tout entier lorsque l'angle BOA deviendra nul. Donc le rapport $\frac{\text{BI}}{\text{ID}}$ décroît à mesure que BOA diminue, et se réduit à zéro en même temps que l'angle BOA. Il en est donc de même du rapport égal $\frac{\text{CI}}{\text{BI}}$, de sorte qu'on a

$$\lim. \frac{\text{CI}}{\text{BI}} = 0;$$

En d'autres termes, l'infiniment petit CI est infiniment petit par rapport à l'infiniment petit BI.

Cette remarque nous apprend qu'il y a lieu d'admettre différents ordres de quantités infiniment petites. Au lieu de chercher la limite du rapport $\frac{\text{CI}}{\text{BI}}$, cherchons la limite du rapport $\frac{\text{CI} \times a}{\overline{\text{BI}}^2}$, a étant une

longueur finie quelconque, variable ou constante ; nous parviendrons à l'équation :

$$\frac{CI \times a}{\overline{BI}^2} = \frac{a}{ID},$$

et par suite, passant à la limite :

$$\lim. \frac{CI \times a}{\overline{BI}^2} = \lim. \frac{a}{ID} = \frac{a}{CD},$$

rapport fini. Nous voyons donc que CI, infiniment petit par rapport à BI, n'est pas infiniment petit par rapport au carré $\overline{BI}^2$.

Si donc on convient d'appeler *infiniment petits du premier ordre* la quantité BI, et toutes celles qui, comme BA, comme arc BC, arc BCA, ont avec BI un rapport limite différent de zéro, on pourra appeler *infiniment petits du second ordre* les quantités telles que CI,.... qui ont un rapport limite différent de zéro avec le carré $\overline{BI}^2$; *infiniment petits du troisième ordre* les quantités qui ont un rapport limite différent de zéro avec le cube $\overline{BI}^3$, et ainsi de suite.

6. Dans la mécanique comme dans la géométrie, on a souvent à considérer des grandeurs infiniment petites, et on arrive à poser des égalités dans lesquelles entrent des termes infiniment petits de divers ordres. Ces égalités peuvent toujours se simplifier, comme nous allons le voir par un exemple.

Soit l'égalité

$$A + Bh + Ch^2 = A' + B'h + C'h^2,$$

dans laquelle A, B, C, A', B', C', sont des quantités variables ou constantes, mais finies, et h une quantité variable infiniment petite. On dira que dans cette équation les termes A et A' sont les termes finis, que les termes Bh et $B'h$ sont infiniment petits du premier ordre, et que les termes Ch^2, $C'h^2$ sont infiniment petits du second ordre. On déduit d'abord de cette égalité l'équation suivante :

$$(A - A') + (B - B')h + (C - C')h^2 = 0.$$

Cette équation se décompose nécessairement en trois autres :

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

En effet, l'équation étant toujours vraie quelque petit que soit h, est

vraie quand $h = 0$, ce qui donne $A = A'$; supprimant donc le terme $A - A'$ et divisant par h, on aura une nouvelle équation :

$$(B - B') + (C - C')\,h = 0,$$

laquelle est encore vraie quelque petit que soit h, et par suite vraie quand $h = 0$. Donc $B = B'$. Supprimant donc encore $B - B'$, il vien $C - C' = 0$ ou $C = C'$. Ce résultat est général quelque soit le nombre des termes de l'égalité donnée. Une équation dans laquelle entrent des termes infiniment petits d'ordres différents de petitesse se décompose nécessairement en autant d'équations qu'il y a d'ordres différents.

Si l'on n'a besoin que d'une seule équation pour résoudre la question proposée, on la trouvera, en général, en prenant la première des équations $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, qui ne se réduit pas d'elle-même à une identité.

Si, par exemple, A est identique à A′, mais que B ne soit pas identique à B′, l'équation $B = B'$ renfermera la solution cherchée. On voit qu'elle résulte de l'équation primitivement posée, en réduisant les termes identiques A et A′, et en effaçant les termes du second ordre, comme infiniment petits par rapport aux termes Bh et $B'h$ qui sont du premier; on a alors :

$$Bh = B'h,$$

et supprimant le facteur commun h, on en déduit $B = B'$. On dit dans ce cas que la solution dépend des termes du premier ordre.

Si A est identique à A′, et B identique à B′, l'équation se réduit à $C = C'$, ce qui revient à effacer, après réduction des termes identiques, les termes d'ordre supérieur au second, en supposant que l'équation en renferme.

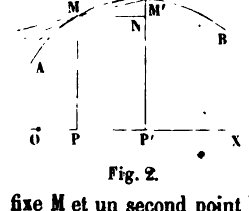


Fig. 2.

La solution dépendrait alors des termes infiniment petits du second ordre.

7. Un exemple éclaircira cette méthode.

Soit proposé de mener en un point M une *tangente* à une courbe plane donnée AB. On entend par tangente à une courbe en un point donné M, la position limite d'une sécante mobile MM′ menée par le point fixe M et un second point M′ qui se rapproche indéfiniment du point M. A mesure que le point mobile M′ se rapproche du point M, la sécante prend diverses positions MS, MS′..., et au moment où le point M′ vient coïncider avec le point M, la sécante se trouve dans une certaine position MT, qui est la tangente cherchée.

Pour trouver cette position limite, menons arbitrairement dans le plan de la courbe une droite OX, et abaissons du point M une perpendiculaire MP sur cette droite. Par le second point M′, menons M′P′ perpendiculaire à OX et, enfin, menons la droite MN parallèle à OX. La position de la sécante MS est entièrement définie par le rapport $\frac{M'N}{MN}$, car ce rapport étant donné, on peut construire un triangle rectangle semblable au triangle MNM′, et si l'on place ce triangle de manière à rendre parallèle à OX le côté droit homologue à MN, l'hypoténuse du triangle sera parallèle à la direction cherchée. Tout se réduit donc à évaluer la limite du rapport $\frac{M'N}{MN}$ quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, auquel cas les deux termes du rapport sont à la fois infiniment petits.

Cette recherche est facile si l'on connaît la relation générale qui lie l'*ordonnée* MP de la courbe à l'*abscisse* OP correspondante.

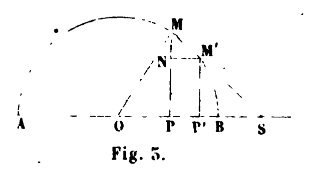


Fig. 5.

Nous ferons la recherche de cette limite pour un cercle AB, ayant pour centre le point O, et pour rayon OA = OB. Soit M le point où l'on veut mener la tangente à la circonférence. Menons une sécante MM′S et cherchons à évaluer le rapport $\frac{MN}{NM'}$, dont la limite définit la direction de la sécante au moment où elle devient tangente à la courbe.

Nous avons MN = MP − M′P′ et NM′ = PP′.

Or, les propriétés connues du cercle donnent les relations :

$$\overline{MP}^2 = AP \times PB,$$
$$\overline{M'P'}^2 = AP' \times P'B.$$

Retranchons, nous aurons la suite d'égalités

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 - \overline{M'P'}^2 &= (MP - M'P')(MP + M'P') = MN \times (MP + M'P') \\ &= AP \times PB - AP' \times P'B = AP \times PB - (AP + PP') \times (PB - PP') \\ &= AP \times PB - AP \times PB - PP' \times (PB - AP) + \overline{PP'}^2 \\ &= PP' \times (AP - PB) + \overline{PP'}^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{MN}{PP'} = \frac{MN}{NM'} = \frac{AP - PB}{MP + M'P'} + \frac{PP'}{MP + M'P'}.$$

Faisons décroître indéfiniment la distance PP′, et passons à la limite, il viendra :

$$\lim.\frac{MN}{NM'}=\frac{AP-PB}{2MP}.$$

Cette équation permet de mener la tangente à la courbe au point M. Car soit MT cette tangente, on aura la proportion :

$$\frac{MP}{PT}=\lim.\frac{MN}{NM'}=\frac{AP-PB}{2MP},$$

ce qui donne :

$$PT=\frac{2\overline{MP}^2}{AP-PB}.$$

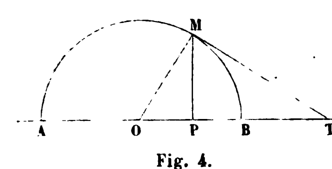


Fig. 4.

On connaîtra par cette équation la position du point T, et il suffira de le joindre au point M pour avoir la tangente demandée. On peut vérifier qu'elle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OM. Joignons en effet OM : nous pouvons remplacer AP par OA + OP et PB par OB — OP ou par OA — OP.

Donc

$$AP-PB=(OA+OP)-(OA-OP)=2OP.$$

Donc enfin

$$PT=\frac{\overline{MP}^2}{OP},$$

ou $\overline{MP}^2=OP\times PT$, ce qui indique que le triangle OMT est rectangle en M.

Cet exemple suffit pour montrer comment il est possible de déterminer la tangente en un point donné d'une courbe, connaissant la relation générale qui lie l'*ordonnée* MP de la courbe avec l'*abscisse* OP correspondante. L'équation dont on s'est servi renfermait des infiniment petits du premier et du second ordre et, en outre, des termes finis qui se sont réduits et ont disparu d'eux-mêmes. La solution a été donnée par les termes du premier ordre, et il n'y aurait eu aucune erreur à craindre en effaçant tout de suite le terme

$\overline{PP'^2}$ comme infiniment petit par rapport aux termes du premier ordre, qui devaient seuls concourir à la solution cherchée.

Nous supposerons dans ce qui suit que l'on sache mener des tangentes aux lignes dont on aura à faire usage. La recherche des tangentes aux courbes constitue une branche particulière de l'analyse qu'il ne serait pas possible de développer ici. Observons, d'ailleurs, que le tracé de la tangente à une courbe peut en général se faire graphiquement et sans calcul. Cette opération graphique donne donc un moyen indirect de trouver la limite d'un rapport $\frac{MN}{NM'}$ de deux grandeurs infiniment petites.

Avant de passer à la cinématique, nous établirons encore les deux propositions suivantes, dont nous aurons à faire de fréquentes applications.

LEMME I.

8. *La projection orthogonale d'une droite finie sur une direction qui fait avec cette droite un angle infiniment petit, est égale à la longueur de la droite, à moins d'un infiniment petit du second ordre.*

Soit AB la droite finie ; MN, la direction sur laquelle se fait la projection. Du point A on abaisse Aa, et du point B, Bb, perpendiculaires sur MN. La longueur ab est la projection de AB. — La construction revient à mener par les points A et B deux plans P et Q perpendiculaires à MN, et à prendre les intersections a et b de ces plans avec la droite.

Fig. 5.

Par le point A, menons une droite AC parallèle à MN; elle sera, comme la droite MN, perpendiculaire aux plans P et Q, et percera ce dernier plan en un point C. Joignons Cb et BC ; la droite AC, perpendiculaire au plan Q, est perpendiculaire aux deux droites Cb, CB, qui passent par son pied dans ce plan. Donc d'une part, la figure AabC est un rectangle, et par suite AC $=$ ab; d'autre part, le triangle ACB est rectangle en C, de sorte que AC est la projection orthogonale de la droite AB sur une direction AC menée parallèlement à MN par le point A. La projection d'une droite AB sur un axe quelconque MN est donc égale à la projection de cette même droite sur tout autre axe parallèle au premier. Cette première partie de la démonstration est générale et ne suppose pas infiniment petit l'angle BAC des deux directions AB, MN.

Ceci posé, nous avons à chercher une limite du rapport de AB à sa

projection AC, dans le triangle rectangle ABC, lorsque l'angle BAC est infiniment petit.

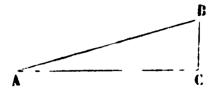


Fig. 5 *bis*.

Nous savons déjà que l'oblique AB est plus grande que la perpendiculaire AC. Posons donc,

$$\frac{AB}{AC} = 1 + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, variable avec l'angle BAC, et se réduisant à zéro quand l'angle BAC devient nul. Il s'agit de trouver une limite supérieure de ε.

On tire de cette égalité :

$$AB = AC + AC \times \varepsilon,$$

et élevant au carré,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}^2 \times \varepsilon + \overline{AC}^2 \times \varepsilon^2.$$

Mais le triangle rectangle ABC donne :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Donc

$$2\overline{AC}^2 \times \varepsilon + \overline{AC}^2 \times \varepsilon^2 = \overline{BC}^2,$$

et par conséquent, on a, en supprimant le terme positif $\overline{AC}^2 \times \varepsilon^2$,

$$2\overline{AC}^2 \times \varepsilon < \overline{BC}^2,$$

ou bien

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}.$$

et par suite le rapport $\frac{AB}{AC}$ est toujours compris entre l'unité et le nombre

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{AC}\right)^2.$$

Si donc BC est infiniment petit par rapport à AC, le rapport $\frac{AB}{AC}$ diffère de l'unité d'une quantité moindre que la moitié du carré du rapport infiniment petit $\frac{BC}{AC}$; la différence entre $\frac{AB}{AC}$ et l'unité est infiniment petite par rapport à l'infiniment petit $\frac{BC}{AC}$.

On peut donc, dans tout problème dont la solution dépend des infiniment petits du premier ordre, confondre sans erreur une longueur AB

et sa projection ab sur une direction faisant avec elle un angle infiniment petit; car cela revient à supprimer dans les équations du problème des termes infiniment petits par rapport à ceux que l'on doit conserver.

LEMME II.

9. Étant donnée une courbe DC, terminée à deux ordonnées DA, CB, perpendiculaires à un axe MN, on partage l'intervalle AB des deux ordonnées en un certain nombre de parties égales, en menant les nouvelles ordonnées ah, bi, ck, dl, em, fn, gp; puis par les points D, h, i, k,.., p, on mène parallèlement à MN des droites Dh', hi', ik', kl',... pC', qui par leurs rencontres avec les ordonnées voisines achèvent les rectangles DAah', $habi'$, $ibck'$,... pgBC'. Cela posé, je dis que *la somme de tous ces rectangles a pour limite l'aire comprise entre la courbe* DC, *les deux ordonnées* DA, CB, *et l'axe* AB, *lorsque le nombre des parties dans lesquelles on a partagé l'intervalle* AB *augmente indéfiniment*.

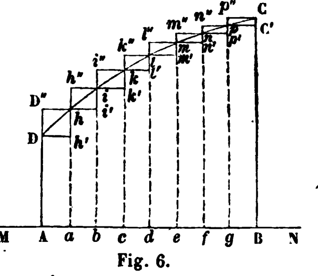


Fig. 6.

La démonstration que nous allons donner suppose que les ordonnées successives AD, ah, bi,... BC, soient croissantes du point A au point B, ou du point B au point A. S'il en était autrement, elle s'appliquerait séparément aux portions de la courbe CD pour lesquelles cette condition serait remplie.

Supposons donc que la courbe s'élève du point C au point D, comme cela a lieu sur la figure. Alors tous les rectangles indiqués dans l'énoncé sont intérieurs à la courbe et si l'on désigne par A l'aire de cette courbe, on aura par conséquent :

$$A > DA \times Aa + ha \times ab + ib \times bc + \ldots + pg \times gB,$$

mais

$$Aa = ab = bc = \ldots = gB = \frac{AB}{n},$$

si l'on désigne par n le nombre de parties égales obtenues en divisant la droite AB; donc

$$A > (DA + ha + ib + \ldots + pg) \times \frac{AB}{n}.$$

Prolongeons extérieurement à la courbe les droites hi', ik', kl'.. , pC',

et menons par le point C la droite Cp'', parallèle à MN, de manière à former un ensemble de rectangles $AahD''$, $h''abi$, $i''bck$..., $p''gBC$, qui feront tous saillie sur l'aire de la courbe, et dont la somme sera plus grande que cette aire. Nous avons donc aussi :

$$A < ha \times Aa + ib \times ab + \ldots + pg \times fg + CB \times gB,$$

ou bien

$$A < (ha + ib + \ldots + pg + CB) \times \frac{AB}{n}.$$

L'aire A est donc comprise entre les deux produits,

$$(DA + ha + ib + \ldots + pg) \times \frac{AB}{n}$$

et

$$(ha + il + \ldots + pg + CB) \times \frac{AB}{n},$$

dont la différence est égale à

$$(CB - DA) \times \frac{AB}{n}.$$

Or cette différence est le produit d'une quantité constante, CB — DA, par une quantité $\frac{AB}{n}$, qui est variable avec le nombre n, et qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut en prenant le nombre n suffisamment grand. Donc elle est infiniment petite.

La différence entre A et l'un ou l'autre des deux produits est moindre que cette différence ; elle est donc elle-même infiniment petite, et par suite, l'aire constante A est la limite commune de la somme des rectangles intérieurs à la courbe et de la somme des rectangles saillants, lorsque le nombre n de ces rectangles augmente indéfiniment.

CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT D'UN POINT.

DÉFINITIONS.

1. Lorsqu'un point est en mouvement, la suite des différentes positions qu'il occupe dans l'espace forme une ligne que l'on peut concevoir comme engendrée par le mouvement du point; on donne à cette ligne le nom de *trajectoire*. La *trajectoire* d'un point mobile est donc la ligne, droite ou courbe, que ce point décrit dans son mouvement.

2. On dit que le mouvement d'un point est *rectiligne* quand la trajectoire de ce point est une ligne droite; qu'il est *curviligne*, quand la trajectoire est courbe; qu'il est *circulaire*, quand la trajectoire est une circonférence de cercle; qu'il est *elliptique*, quand la trajectoire est une ellipse; qu'il est *parabolique*, quand la trajectoire est une parabole, etc.

3. La connaissance de la trajectoire d'un point mobile ne suffit pas pour définir le mouvement de ce point; il faut encore, pour que le mouvement du point soit entièrement connu, que l'on sache à quel instant s'effectue le passage du mobile aux divers points géométriques de la trajectoire. Supposons, par exemple, que la ligne MN soit la trajectoire d'un point mobile, et qu'à un moment quelconque le mobile ait été observé au point A; qu'une seconde après il ait été observé en B; qu'une

Fig. 7.

seconde plus tard il ait été vu en C; qu'au bout de trois secondes, il ait passé au point D, et ainsi de suite de seconde en seconde; la position du mobile sur la trajectoire sera connue, et la loi du mouvement sera définie *approximativement* par le tableau des espaces successivement parcourus, AB, BC, CD,... pendant les intervalles de temps qui se sont écoulés d'une observation à l'observation suivante. On peut prendre ces intervalles assez petits, pour que l'approximation soit équivalente, au point de vue pratique, à la connaissance complète de la loi cherchée.

Par exemple, si MN est un chemin de fer, et que les points A, B, C, D, en soient les stations successives, le mouvement des trains qui parcourent la ligne dans un sens ou dans l'autre est en général suffisamment défini par les tableaux donnant l'heure du passage du train à ces diverses stations.

4. Supposons qu'un mobile parcourc une trajectoire donnée MN; on définit son mouvement de la manière suivante : on commence par choisir arbitrairement sur la trajectoire un point géométrique fixe O, qui sert d'*origine*, et à partir duquel on compte les longueurs des *arcs* de la courbe ; la position d'un point quelconque A de la ligne MN est déterminée par la longueur de l'arc OA.

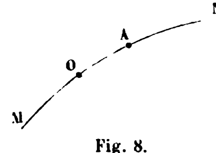


Fig. 8.

On convient de plus de distinguer par les signes + ou — les arcs portés à partir de l'origine O dans un sens ou dans l'autre; les arcs positifs seront comptés par exemple dans le sens OA, et les arcs négatifs dans le sens OM. Une longueur affectée de l'un des signes + ou — définit donc un point de la courbe et un seul. Appelons d'une manière générale s un arc variable issu du point O. A chaque position du mobile sur la ligne MN correspond une valeur particulière de s, positive ou négative; le mouvement sera entièrement déterminé si l'on donne les valeurs successives que prend cet arc variable s dans la suite des temps, ou, pour parler le langage de l'analyse, *si l'on exprime l'arc s en fonction du temps t.*

5. Appliquons cette méthode à un mouvement circulaire, dont la loi soit exprimée par la relation

$$s = at, \qquad (1)$$

a représentant un nombre constant que l'on suppose connu. Soit C le centre du cercle qui sert de trajectoire au mobile, O l'origine des arcs, que l'on comptera positivement dans le sens OA, et négativement dans le sens opposé. Si l'on fait $t=0$, l'équation (1) donne $s=0$, ce qui correspond au point O lui-même. On voit donc que pour $t=0$, ou, comme on dit, à *l'origine des temps*, le mobile est au point O, ou à *l'origine des arcs*. Si l'on donne à t des valeurs positives croissantes, et que le nombre a soit positif, s sera positif, et ira croissant. Le mobile se déplace donc sur la circonférence dans le sens OA. Cherchons le moment du passage du mobile au point B, seconde extrémité du diamètre mené par le point O. Désignons par R le rayon du cercle, et soit π le rapport de la circonférence au diamètre. L'arc OAB, qui est égal à une demi-circonférence, aura pour longueur $R\times\pi$; la durée t' du trajet du mobile de O en B sera donc donnée par l'équation :

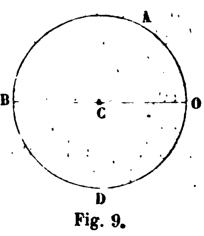


Fig. 9.

$$R\times\pi=a\times t'.$$

On en déduit

$$t'=\frac{\pi R}{a}.$$

Le mobile, après avoir passé au point B, parcourt la demi-circonférence BDO, et revient passer au point O ; la valeur particulière du temps, t'', pour laquelle a lieu ce second passage, sera donnée par l'équation

$$2\pi R=a\times t''.$$

c'est-à-dire

$$t''=\frac{2\pi R}{a}.$$

On voit que t'' est double de t', de sorte que le mobile met autant de temps à aller de B en O qu'il en a mis à aller de O en B. A partir du retour au point O, le mobile fera une seconde

fois le tour du cercle en y mettant autant de temps qu'il en a mis à faire le premier tour, et ainsi de suite indéfiniment. Les valeurs négatives de t correspondraient aux tours qui auraient précédé celui que nous avons regardé tout à l'heure comme le premier ; enfin si a était un nombre négatif, le mouvement du mobile s'effectuerait dans le sens OD, au lieu du sens OA, que nous avons regardé comme le sens positif.

Proposons-nous de déterminer le nombre a par l'observation du mouvement ; nous évaluerons à l'aide d'un chronomètre le temps T que le mobile met à parcourir la circonférence entière OABDO, et nous aurons l'égalité :

$$T \times a = 2\pi R.$$

Donc

$$a = \frac{2\pi R}{T}.$$

Substituons cette valeur de a dans l'équation du mouvement, il viendra :

$$s = \frac{2\pi R}{T} \times t,$$

ou bien encore

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{t}{T}.$$

Cette équation n'est autre chose qu'une proportion, ou une égalité de rapports : les arcs s et $2\pi R$, sont entre eux comme les temps t et T que le mobile met à les parcourir ; en temps égaux, le mobile parcourt donc des arcs égaux, ce qu'on exprime en disant que le mouvement est uniforme.

MOUVEMENT UNIFORME. — MOUVEMENT VARIÉ.

6. Le mouvement d'un point est dit *uniforme* lorsque le point parcourt en temps égaux des arcs égaux de sa trajectoire, et l'on appelle *vitesse* du mouvement uniforme la longueur de l'arc décrit dans un temps égal à l'unité.

7. La vitesse d'un mouvement uniforme est une longueur déterminée dès que l'unité de temps est choisie. On prend ordinairement pour unité de temps, en mécanique, la *seconde sexagésimale*, ou la 86400e partie du *jour solaire moyen*. Cette unité étant bien définie, on saura ce que représente une vitesse égale à une droite finie quelconque AB ; cette expression indique que le mobile parcourt un espace égal à AB dans une seconde.

A B

Fig. 10.

8. Pour représenter la vitesse par un nombre, il suffit de donner la mesure de la longueur AB qui la représente, c'est-à-dire de prendre le rapport de cette longueur à l'unité de longueur, au mètre par exemple. Ainsi, l'expression *vitesse de* 10 *mètres* définit un mouvement uniforme dans lequel le mobile parcourt un espace de 10 mètres pendant chaque seconde.

Quelles que soient les unités employées pour l'évaluation des vitesses, on peut les ramener à la seconde et au mètre; c'est ce qu'on fait toujours en mécanique.

Par exemple, un train de chemin de fer parcourt 45 kilomètres à l'heure. Sa vitesse serait représentée par le nombre 45 si l'heure était adoptée pour unité de temps et le kilomètre pour unité de longueur. Mais comme c'est à la seconde et au mètre qu'on est convenu de rapporter les durées et les espaces, on observera que 45 kilomètres équivalent à 45000 mètres, et qu'une heure équivaut à 3600 secondes. Le train parcourant 45000 mètres en 3600 secondes, parcourt en une seconde le quotient

$$\frac{45000}{3600} = 12^{m}.5.$$

Il parcourt donc 12^m,50 par seconde, et sa vitesse est représentée, dans le système usuel d'unités, par le nombre 12,5.

9. La vitesse des navires s'estime habituellement en *nœuds*. Cette expression vient de la méthode employée à bord des bâtiments pour déterminer la vitesse de la marche. On jette à la mer, à l'arrière du navire, l'appareil appelé *loch ;* c'est un flotteur attaché à une longue cordelle qui s'enroule sur une bobine ; un matelot soutient l'axe de cette bobine de manière à la laisser tourner librement, pendant que la corde se dévide. Un autre matelot

porte un sablier, qui sert à mesurer exactement une durée, d'une demi-minute par exemple.

On imprime un mouvement de rotation rapide à la bobine au moment où l'on jette le loch, et la corde commence à se dérouler L'observation d'où l'on déduit la vitesse ne commence pas à cet instant ; il faut attendre en effet que le flotteur soit à une certaine distance du bâtiment, pour qu'il ne soit pas influencé par son sillage et pour qu'on puisse compter sur son immobilité. Le sablier est retourné, et l'observation commence, au moment précis où l'on voit passer une marque rouge fixée sur la corde en un certain point suffisamment éloigné de l'extrémité qui s'attache au flotteur. La corde se déroule tant que dure l'écoulement du sable ; on l'arrête subitement lorsque le sable est épuisé. Alors on retire le loch, en ayant soin de compter les *nœuds* ou marques équidistantes placées sur la corde à partir du signal rouge qui sert d'origine à la graduation. Si l'on en trouve huit par exemple, on dira que *le navire file huit nœuds*. Les nœuds sont espacés sur la corde de telle sorte qu'un nœud corresponde à une vitesse de 1852 mètres par heure[1]. Il faut pour cela, si l'observation dure une demi-minute, que l'espacement réel des nœuds soit égal à

$$\frac{1852^{m}}{60 \times 2} = 15^{m},43^{2}.$$

Une vitesse de 8 nœuds équivaut donc à une vitesse $1852^{m} \times 8$, ou 14816^{m} par heure, ou à une vitesse de $30,86 \times 8 = 246,88$ par minute, ou enfin à une vitesse de $\frac{246,88}{60} = 4^{m},114$, la seconde étant prise pour unité.

[1] Le quart du méridien terrestre ayant une longueur de 10 000 000 mètres, un degré vaut, en moyenne, à la surface de la terre $\frac{10\,000\,000}{90} = 111\,111^{m},11$, et une minute sexagésimale $\frac{111\,111,11}{60} = 1852$ mètres environ. Le nœud correspond donc à une minute de grand cercle parcourue en une heure à la surface du globe.

[2] Dans la pratique, on a reconnu qu'il fallait réduire un peu cet intervalle, et on le fixe à $14^{m},62$, pour tenir compte de l'influence exercée sur le loch par la marche du bâtiment.

10. Le mouvement circulaire que nous avons étudié tout à l'heure (§ 5) est un mouvement uniforme ; car le mobile parcourt des arcs égaux en temps égaux ; et le nombre a est la vitesse de ce mouvement, puisque pendant une durée égale à l'unité de temps, le mobile décrit un arc mesuré par le nombre a d'unités de longueur.

11. Le mouvement d'un point mobile est *varié* lorsque les espaces décrits en temps égaux ne sont pas égaux.

Soit MN la trajectoire, droite ou courbe.

M A B C D N

Fig. 11.

Supposons que A, B, C, D,... soient des positions successives du mobile, observées à des intervalles de temps égaux entre eux. Le mouvement sera varié et non uniforme, si les espaces AB, BC, CD, décrits en temps égaux, ne sont pas égaux entre eux. Supposons que les observations aient été faites à des intervalles de temps égaux chacun à t secondes. Le quotient $\frac{AB}{t}$ représentera l'espace moyen décrit par le mobile pendant chacune des t secondes qu'il a mises à passer du point A au point B. Ce quotient est ce qu'on appelle la *vitesse moyenne* du mobile entre les points A et B. De même $\frac{BC}{t}$ est la vitesse moyenne entre B et C, et $\frac{CD}{t}$ la vitesse moyenne entre C et D, etc.

12. En général, la *vitesse moyenne* d'un mobile entre deux positions qu'il occupe successivement sur sa trajectoire s'obtient en divisant la longueur du trajet entre ces deux positions par la durée de ce trajet. Si le mouvement est uniforme, cette opération donne la vitesse constante du mouvement.

Par exemple, un train de chemin de fer part de Paris à 7 heures 30 minutes et arrive à Creil à 8 heures 19 minutes ; la distance du point de départ au point d'arrivée, est de 51000 mètres ; le trajet s'accomplit en 1 heure 19 minutes ou en 4740 secondes. La vitesse moyenne est donc :

$$\frac{51\,000}{4\,740} = 10^{m},76.$$

Si au lieu de considérer la distance entière des deux stations de

départ et d'arrivée, on avait observé pendant la marche la durée du parcours accompli par le train entre un poteau kilométrique particulier et le poteau kilométrique suivant, et qu'on ait trouvé cette durée égale à 45 secondes, la vitesse moyenne pendant cet intervalle aurait été de

$$\frac{1000^{m}}{45} = 22^{m},22,$$

nombre plus grand que la moyenne obtenue pour la distance entière.

La vitesse moyenne dans un mouvement varié n'est donc pas la même pendant toute la durée du mouvement; et elle varie suivant qu'on la prend à des époques différentes et pendant un intervalle de temps plus ou moins long. Pour un train, elle est très-faible dans les kilomètres voisins du départ; elle s'accroît ensuite, puis elle décroît rapidement au moment de l'arrivée.

13. On appelle *vitesse du mobile à son passage en un point particulier A de sa trajectoire*, la vitesse moyenne avec laquelle le mobile parcourt un arc infiniment petit AA', aboutissant à ce point A, ou la limite du quotient

$$\frac{AA'}{\theta},$$

θ étant la durée infiniment petite du parcours de cet arc infiniment petit. En pratique, on ne peut mesurer directement que des durées et des arcs finis; mais si le temps θ est suffisamment court, et l'arc AA', suffisamment petit, le rapport $\frac{AA'}{\theta}$ différera très-peu de la valeur qu'il aurait si ses deux termes étaient infiniment petits, et il fera connaître avec une grande approximation les valeurs de la vitesse au point A.

Fig. 12.

14. L'arc très-petit AA' peut être confondu avec une ligne droite; prolongeons indéfiniment cette droite dans la direction du mouvement. La direction AB ainsi obtenue a avec la courbe MN deux points communs A et A', infiniment rapprochés. On sait qu'une telle droite s'appelle en géométrie une *tangente à la courbe*

au point A. Elle indique la direction du mouvement du mobile pendant qu'il parcourt l'arc AA'. Cette considération conduit à attribuer une direction à la vitesse du mobile, que jusqu'ici nous n'avions regardée que comme un rapport. *La vitesse du mobile au point* A *a pour direction la tangente menée à la trajectoire en ce point ;* elle a pour sens, le sens même du mouvement en ce point de la trajectoire. On peut représenter la vitesse en grandeur en portant sur la droite AB, dans le sens du mouvement, une longueur AC égale à l'espace que décrirait le mobile dans l'unité de temps, s'il parcourait la droite AB d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à $\frac{AA'}{\theta}$. En d'autres termes, AC est égal à $\frac{AA'}{\theta}$; car, dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps mis à les parcourir, et par suite on a la proportion :

$$\frac{AC}{1} = \frac{AA'}{\theta}$$

ou bien

$$AC = \frac{AA'}{\theta}.$$

De cette manière, on peut représenter graphiquement la grandeur et la direction de la vitesse d'un mobile en un point quelconque A de sa trajectoire. Le mobile se déplaçant par exemple dans le sens MN, on mènera au point A une tangente AB à la courbe MN; sur cette tangente on portera à partir du point de contact A, et dans le sens du mouvement, une longueur AC égale à l'espace que le mobile décrirait d'un mouvement uniforme pendant l'unité de temps, s'il conservait, pendant toute cette durée, la vitesse moyenne qu'il possède aux environs du point A. La droite AC représentera la vitesse du mobile au point A en direction, en sens, et en grandeur. Cette représentation suppose l'unité de temps définie ; elle subsiste quand même on n'aurait pas fait choix d'une unité de longueur ; car la droite finie AC, qui exprime la grandeur de la vitesse, est donnée par

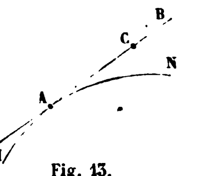


Fig. 13.

une longueur effective, et non par un rapport à une unité arbitrairement choisie.

En se reportant à cette construction géométrique, on saura ce qu'on entend par la *direction* de la vitesse d'un mobile en un point donné de sa trajectoire. Si le mouvement est rectiligne, la direction de la vitesse est la droite elle-même que le mobile décrit.

La recherche de la direction de la vitesse d'un mobile en un point de sa trajectoire se ramène donc immédiatement à la construction d'une tangente à une ligne. Nous allons voir que la recherche de la grandeur de la vitesse peut se ramener à un problème du même genre, au moyen de la *courbe représentative du mouvement*.

COURBE REPRÉSENTATIVE DU MOUVEMENT D'UN POINT, OU COURBE DES ESPACES.

15. Le mouvement du mobile sur sa trajectoire est connu dès que l'on donne, pour chaque instant, l'arc s qui sépare sur la trajectoire la position actuelle du mobile d'un point fixe pris pour origine. Cette relation entre l'arc s et le temps t peut se représenter par une ligne.

Soit MN la trajectoire, O l'origine des arcs, et A la position du

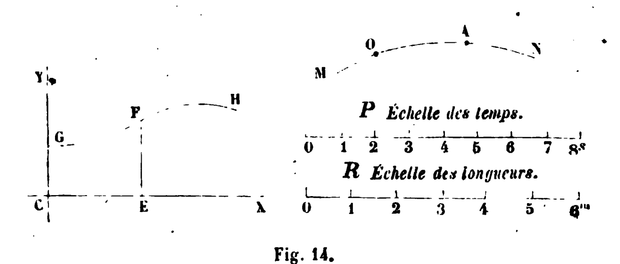


Fig. 14.

mobile au bout d'un certain temps t. L'arc OA sera la valeur de s correspondante.

Menons dans un plan deux axes rectangulaires CX, CY; à partir du point C, portons sur l'axe CX *une abscisse* CE proportionnelle au temps t; cette construction suppose qu'on a fait choix d'une échelle arbitraire P, dont les divisions égales correspondent à des intervalles de temps égaux; si par exemple, les divisions de l'échelle représentent des secondes, et que t soit exprimé en secondes, on prendra pour CE un nombre t de divisions.

Au point E, ainsi obtenu, menons une droite EF parallèle à CY, et portons sur cette ligne une longueur EF égale ou proportionnelle à l'arc $OA = s$; on emploiera pour cette construction une seconde échelle, l'échelle des longueurs, R, dont les divisions égales, arbitrairement choisies, représenteront chacune l'unité avec laquelle on aura mesuré l'arc OA.

L'*ordonnée* EF devra contenir autant de ces divisions qu'il y aura de fois cette unité dans l'arc s.

Si l'on répète cette construction à différentes époques, le mobile occupera à ces époques différents points de sa trajectoire, et à chaque position, correspondront une valeur du temps t qui fournira sur l'épure une abscisse, et une valeur de l'arc s, qui fournira une ordonnée; à chaque position A du mobile correspond donc un point F de l'épure : la suite des points F forme sur le plan YCX une ligne continue GH qui représente la loi du mouvement du mobile. L'arc s peut être positif ou négatif; il est positif quand il est compté sur la trajectoire à droite du point O, il est négatif quand on le compte en sens contraire. On distinguera ces deux cas sur l'épure en portant au-dessus de CX les ordonnées représentatives des valeurs positives de s, et au-dessous les ordonnées représentatives des arcs négatifs. De même, le prolongement vers la gauche de l'axe CX servira à porter les abscisses négatives qui correspondent aux valeurs négatives du temps t. L'*origine des temps*, qui correspond à $t = 0$, ou au point C, est en effet complétement arbitraire; et une fois qu'on l'a adoptée, on doit regarder comme négative toute valeur du temps qui correspond à une époque antérieure à cette origine.

16. D'après ces conventions, on pourra déterminer toutes les circonstances du mouvement d'un point par l'inspection de l'é-

pure représentative de ce mouvement. Soit par exemple l'épure suivante, relative à un mouvement qui s'opère sur une ligne

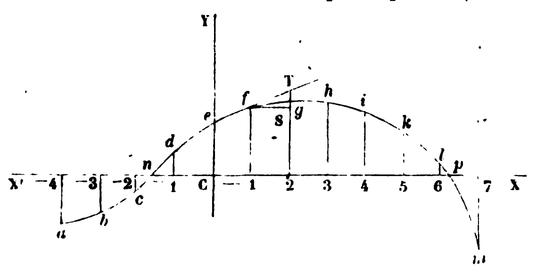


Fig. 15.

droite MN. Les intervalles égaux (C1), (1.2), (2.3),.... (—1,—2), pris sur l'axe CX, représentent les secondes successives ; les ordonnées correspondantes

$$(-4a),\ (-3b),\ (-2c),\ \ldots\ldots\ (3h),\ (4i),\ (5k),\ (\ l),\ (7m)$$

représentent les valeurs correspondantes de la distance variable OA, prise sur la trajectoire MN à partir d'une origine fixe O ; l'on sait de plus que ces distances doivent être comptées à partir du point O vers la gauche, lorsque l'ordonnée est dirigée vers le bas sur l'épure ; c'est ce qui arrive aux points — 4, — 3, — 2, et 7 ; et qu'elles doivent être portées à droite lorsque les ordonnées sont dirigées dans le sens positif, comme aux points — 1, C, 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Cela posé, il est facile de trouver sur la droite MN les positions du mobile pour toute valeur du temps t comprise entre les limites de l'épure, c'est-à-dire de — 4 secondes à + 7 secondes, ce qui fait en tout une période de 11 secondes.

m' b' l' k' i' h'
M a' c' O d' e' f' g' N

Fig. 16.

Prenons, à gauche de O, $Oa' = (-4a)$
$Ob' = (-3b)$
$Oc' = (-2c)$

Prenons à droite de O, $Od' = (-1d)$
$Oe' = Ce$
$Of' = (1f)$
$Og' = (2g)$
$Oh' = (3h)$
$Oi' = (4i)$
$Ok' = (5k)$
$Ol' = (6l)$
à gauche de O, $Om' = (7m)$

Les points a', b', c', d', e', f', g', h', i', k', l', m', seront les positions successives du mobile, de seconde en seconde, à partir de 4 secondes avant l'époque prise pour origine du temps. On voit que le mobile passe au point O entre les positions c' et d', c'est-à-dire pour une valeur du temps comprise entre — 2 secondes et — 1 seconde, et qu'il y repasse, en sens contraire, entre l' et m', pour une valeur de t comprise entre 6^s et 7^s. Les points d'intersection n et p de la courbe avec l'arc X′ X, donnent les époques précises des passages du mobile au point O; il suffit pour les déterminer d'évaluer à l'échelle les temps représentés par les abscisses Cp, Cn, des points de rencontre. L'ordonnée de la courbe acquiert un *maximum* aux environs du point g, qui correspond à $t = 2$ secondes; ceci indique que le mobile, après s'être éloigné du point O dans le sens ON, jusqu'à sa position g', revient sur ses pas dans le sens g'O. Enfin l'épure nous donne, ainsi que nous l'avons annoncé tout à l'heure, un moyen de mesurer la vitesse du mobile à un moment quelconque. Supposons par exemple qu'on veuille déterminer la grandeur de la vitesse lorsque le temps t a pour valeur + 1 seconde. Le mobile est alors au point f' sur sa trajectoire, qui correspond au point f de l'épure. En ce point f, menons une tangente fT à la courbe représentative du mouvement, et une parallèle fS à l'axe CX. La tangente coupe en T l'ordonnée $(2g)$, qui est éloignée du point f de la quantité (1,2), représentant l'unité de temps, et l'intervalle ST représente la vitesse cherchée.

En effet (fig. 16) la droite fT étant tangente à la courbe au point f, peut être considérée comme ayant, avec cette courbe, un second point commun f_1, infiniment voisin du premier. Par le point f_1, menons $f_1 f_2$ parallèle à l'ordonnée $(f, 1)$; cette droite coupe en f_2 la parallèle fS menée par le point f à l'axe CX. La distance

ff_2 représente à l'échelle des temps une durée infiniment petite, pendant laquelle le mobile s'est déplacé sur sa trajectoire d'une quantité infiniment petite $f_2 f_1$; or, les triangles $ff_2 f_1$, fST sont semblables et donnent la proportion :

$$\frac{f_1 f_2}{ff_2} = \frac{\text{ST}}{f\text{S}}.$$

Fig. 17.

Dans le temps ff_2, le mobile parcourt l'espace $f_1 f_2$; si donc, à partir de cet instant, son mouvement restait uniforme pendant toute la durée fS, il parcourrait l'espace ST. Mais fS représente par hypothèse l'unité de temps. Donc ST est l'espace que parcourrait le mobile pendant l'unité de temps s'il conservait pendant cette durée la vitesse qu'il possède au moment de son passage en f'. Donc enfin, ST est la grandeur même de la vitesse cherchée.

Pour trouver la vitesse à un moment quelconque, il suffit donc de mener à la courbe représentative du mouvement une tangente MT au point M, qui correspond à ce moment ; puis de mener par le point M une parallèle MS à l'axe des temps CX ; de prendre sur cette parallèle une longueur MS égale à l'unité de l'échelle des temps, et d'achever le triangle MST en menant par le point S une parallèle ST à l'ordonnée MP. La longueur ST représentera, à l'échelle des espaces, la vitesse du mobile à l'instant défini par la valeur du temps $t = \text{CP}$.

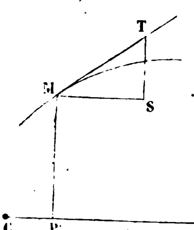


Fig. 18.

La recherche de la vitesse, en direction, revient au tracé d'une tangente à la trajectoire ; le tracé d'une tangente à la courbe représentative du mouvement conduit de même à la détermination de la vitesse en grandeur.

On remarquera qu'au point g, où la tangente à la courbe est parallèle à CX, la vitesse est nulle ; le point mobile, après s'être avancé jusqu'en g' sur sa trajectoire, s'y arrête un instant très-court avant de rétrograder. Au point h, le triangle qui donne la

vitesse se renverse, c'est-à-dire que la tangente hT' coupe l'ordonnée (4 i) en un point T' situé en dessous du point S' où cette ordonnée est rencontrée par la droite hS' menée parallèlement à l'axe des temps. Cette circonstance se présente toutes les fois que le mobile a un mouvement rétrograde sur sa trajectoire ; alors les ordonnées de la courbe représentative diminuent à mesure que le temps augmente [1], et la variation de l'ordonnée est négative pour une variation positive du temps. On dira donc, dans ce cas, que la *vitesse est négative* et qu'elle est égale à — S' T'.

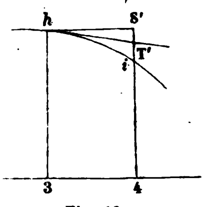


Fig. 19.

17. La courbe *abcndef...m* (fig. 15), qui nous a servi à étudier le mouvement du mobile sur sa trajectoire et à déterminer ses vitesses en différents points ou à différents moments, prend le nom de *courbe des espaces*, parce que les différences de ses ordonnées représentent les espaces successivement décrits par le mobile. Cette courbe peut avoir des formes très-variées, suivant la loi du mouvement du point. Mais elle possède nécessairement les caractères suivants, dès qu'elle représente un mouvement effectif et réel :

1° A chaque valeur du temps correspond une seule valeur de l'ordonnée, car il est impossible qu'à un même instant le mobile soit à la fois en plusieurs points distincts de la trajectoire, dont chacun correspondrait à l'une des ordonnées de la courbe ;

2° La ligne des espaces est continue, car il est impossible que le mobile passe d'un point à un autre de sa trajectoire sans avoir passé par une série de points intermédiaires. Les ordonnées successives de la ligne des espaces varient donc par degrés infiniment petits et non par sauts brusques ;

3° La ligne des espaces peut avoir, dans certains cas, des *points anguleux*. On appelle ainsi un point A d'une ligne BAB' (fig. 20) où viennent se réunir deux branches BA, AB' de courbes ayant des tangentes différentes AT, AT'. Il résulte de cette disposition que la vitesse du mobile subit, à l'instant $t =$ CD, une variation brusque ;

[1] Rappelons que d'après les définitions de l'algèbre, une quantité négative est toujours *moindre* qu'une positive, et que de deux quantités négatives, la plus petite est celle qui a la plus grande valeur absolue.

en effet, à gauche de l'ordonnée AD, la vitesse sera déterminée par une construction où l'on fera usage de la tangente AT, et, à droite, elle sera déterminée par une construction où l'on fera usage de la tangente AT′. Si l'on prend sur la figure une longueur DD′ égale à l'unité de temps et qu'on achève les triangles ASE, ASE′, en menant la droite AS parallèle à CX, la vitesse passera brusquement de la valeur + SE, avant l'instant $t = CD$ à la valeur — SE′ après cet instant. Ce changement brusque est possible dans le mouvement des points géométriques; mais, rigoureusement, il est inadmissible dans le mouvement des points matériels; la vitesse d'un corps matériel ne peut subir que des changements graduels; les variations instantanées de la vitesse d'un point matériel ne sont admissibles dans la mécanique que comme un procédé d'approximation plus ou moins grossière;

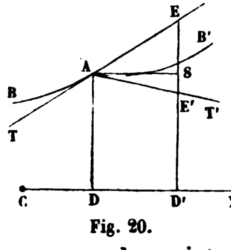


Fig. 20.

4° Enfin, la courbe des espaces ne peut avoir, en aucun point, de tangente parallèle à l'axe CY. Si la courbe venait toucher son ordonnée au point A, le triangle qui donne la vitesse se changerait en une bande indéfinie comprise entre deux parallèles, et la vitesse serait infinie, ce qui n'est admissible que dans certains mouvements géométriques.

Fig. 21.

COURBE DES VITESSES.

17. Supposons tracée la courbe des espaces ABDEFG. Nous savons construire, pour chaque point de cette courbe, la vitesse du mobile sur sa trajectoire au moment qui correspond à ce point. Cette vitesse nous est donnée par une certaine longueur, qui est parallèle à l'axe CY, et qui représente à l'échelle des longueurs un espace décrit dans l'unité de temps. Nous pouvons nous servir

de ces longueurs représentatives des vitesses pour construire une seconde courbe dont les ordonnées indiqueront les vitesses du mobile, comme les ordonnées de la première indiquaient les arcs décrits. Menons une ordonnée quelconque MP ; construisons la

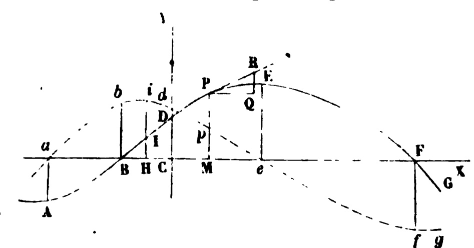


Fig. 22.

vitesse QR correspondante à l'instant $t = CM$; prenons sur l'ordonnée MP, à partir de l'axe CX, une longueur $Mp = QR$. Répétons cette construction pour un certain nombre de points, et nous obtiendrons une ligne *abdpefg* qui sera la courbe des vitesses. On voit, par l'inspection de cette courbe, que la vitesse est positive du point *a* au point *e*, c'est-à-dire de l'instant $t = -Ca$ à l'instant $t = +Ce$; cette période est celle pendant laquelle le mobile se déplace dans le sens positif sur sa trajectoire. Les points *a* et *e* sont les *projections* faites sur l'axe des temps parallèlement à l'axe CY, des points A et E, où l'ordonnée de la courbe des espaces atteint un maximum ou un minimum. Alors le mouvement change de sens. La vitesse est maximum au point *i*, c'est-à-dire au moment $t = -CH$. A cet instant, la courbe des espaces, qui donne $s = +HI$, a un point d'inflexion I ; la tangente à la courbe atteint en ce point son maximum d'inclinaison sur l'axe CX. Au delà de $t = +Ce$, la vitesse est négative et le mouvement du mobile est rétrograde. S'il y avait des points anguleux S dans la ligne des espaces (fig. 22), il y aurait discontinuité dans la courbe des vitesses ; pour l'abscisse CT, l'ordonnée de cette dernière courbe passerait subitement de la longueur T*s* à la longueur T*s'*.

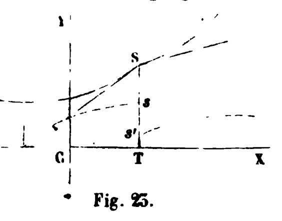


Fig. 23.

18. Nous venons de voir comment on pouvait déduire du tracé de la courbe des espaces le tracé de la courbe des vitesses. Nous allons montrer comment on peut résoudre le problème inverse : *Étant donnée la courbe des vitesses, construire la courbe des espaces.*

Soit *abef* la courbe des vitesses. Considérons le mouvement du mobile à partir d'une époque quelconque, par exemple à partir

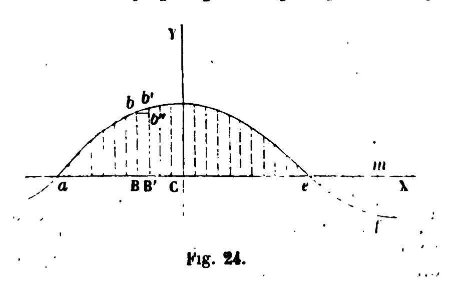


Fig. 24.

de celle qui est définie par l'abscisse $t = -Ca$. Partageons l'axe des temps, à partir du point A, en parties égales infiniment petites; elles représenteront chacune une durée très-courte θ. Par les points de division menons les ordonnées de la courbe, qui représenteront les valeurs successives de la vitesse, aux époques définies par les valeurs suivantes du temps :

$$-Ca+\theta,\ -Ca+2\theta,\ -Ca+3\theta,\ -Ca+4\theta,\ \text{etc.}$$

Appelons d'une manière générale v l'ordonnée de la courbe pour une certaine valeur t du temps. Cette ordonnée v représentant la vitesse, c'est-à-dire l'espace décrit d'un mouvement uniforme pendant l'unité de temps, l'espace décrit par le mobile sur sa trajectoire pendant le temps θ sera le produit $v\theta$. Or, ce produit peut s'interpréter sur la figure : c'est le produit d'une ordonnée Bb par la distance BB' de deux ordonnées consécutives, c'est-à-dire l'aire du rectangle BB'$b''b$, lequel diffère infiniment peu de l'aire comprise entre l'arc de la courbe, l'axe des temps et les deux ordonnées Bb, B'b'. Chacune de ces aires infiniment

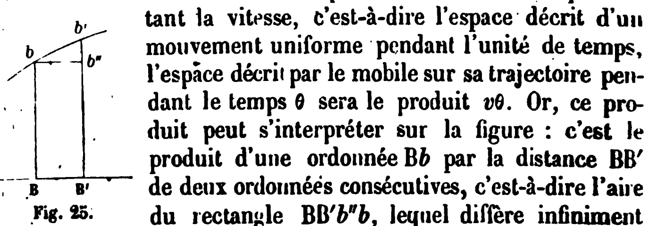


Fig. 25.

petites représente donc l'espace décrit par le mobile sur la trajectoire pendant un même temps θ, compté à partir de l'époque définie par l'abscisse correspondante. Les valeurs négatives de la vitesse indiquent le mouvement rétrograde du mobile; on devra donc prendre négativement les aires correspondantes aux ordonnées négatives. Les signes étant ainsi définis, si l'on fait la somme algébrique de tous ces éléments de surface à partir d'un point quelconque a, jusqu'à un point quelconque m, le résultat que l'on obtiendra, et qui n'est autre chose que l'aire de la courbe des vitesses, représentera le déplacement total du mobile sur sa trajectoire à partir de l'époque $t = -Ca$ jusqu'à l'époque $t = +Cm$; en d'autres termes, les *aires successives de la courbe des vitesses*, à partir d'un point quelconque a de l'axe des abscisses, représenteront en grandeur et en signe les déplacements totaux successifs du point mobile sur sa trajectoire, à partir du point qu'il occupe à l'époque définie par l'abscisse du point a qui sert d'origine à la mesure des aires.

Le problème est donc ramené à la recherche des aires dans la courbe des vitesses ou, comme on dit en géométrie, à la *quadrature* de cette courbe. Ce problème résolu, il suffira, pour définir entièrement le mouvement du point, de faire connaître le lieu qu'il occupe sur sa trajectoire *à l'époque que l'on a prise pour origine des aires.*

19. La géométrie fait connaître pour certaines lignes des procédés de quadrature; on pourra donc employer ces procédés lorsque la ligne des vitesses sera l'une des lignes étudiées en géométrie : ligne droite, parabole, ellipse,.... Si, comme cela arrive souvent, la courbe des vitesses ne rentre pas dans un type connu, on aura recours aux procédés généraux de quadrature par approximation, qui permettront de tracer graphiquement la courbe des espaces avec une suffisante exactitude.

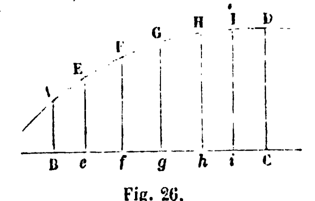


Fig. 26.

Pour évaluer l'aire ABCD comprise entre la courbe AD, les ordonnées AB, CD, et l'axe des abscisses CB, on inscrira dans la courbe un contour polygonal AEFGHID, dont les côtés rectilignes

s'écartent peu des arcs de courbe compris entre leurs extrémités; et l'on évaluera les aires des trapèzes successifs AE*e*B, EF*fe*, FG*gf*, ... IDC*i*, que la géométrie enseigne à mesurer. La somme de ces trapèzes représentera avec une grande approximation l'aire de la courbe cherchée, car la différence est égale à la somme des aires des segments compris entre les cordes AE, EF, FG, ... ID, et les arcs sous-tendus, somme qui peut être considérée comme négligeable si l'on a suffisamment multiplié le nombre des côtés du polygone inscrit.

On ne doit pas être surpris de voir un espace décrit, c'est-à-dire une longueur, représenté par une aire, ou une surface. Il est facile de se rendre compte de cette particularité. Nous avons vu que l'espace élémentaire décrit dans le temps θ est $v\theta$; dans ce produit, v est une longueur, et θ un nombre; c'est le rapport de la durée du trajet du point mobile à l'unité de temps. Le rectangle élémentaire $v\theta$ n'a donc pas ses deux dimensions de même nature, et si la figure fait de θ une longueur, il est entendu qu'en réalité on doit substituer à θ le rapport $\frac{\theta}{T}$ de cette longueur à la longueur qui représente l'unité de temps. Alors l'expression $\frac{v\theta}{T}$ représentera une longueur, c'est-à-dire la seconde dimension d'un rectangle qui aurait $v\theta$ pour surface et T pour première dimension. Après avoir déterminé, à l'aide de l'épure, les aires A de la courbe des vitesses, il faudra donc diviser ces aires par la longueur T qui représente l'unité de temps à l'échelle, et les résultats de cette opération, qui seront des longueurs, représenteront les arcs de la trajectoire, ou les ordonnées de la courbe des espaces.

EXTENSION DE LA DÉFINITION DU MOT VITESSE.

20. La vitesse d'un mobile à un instant donné est le rapport de l'espace infiniment petit qu'il décrit sur sa trajectoire au temps employé à le décrire. Nous avons vu comment on pouvait par la considération d'une courbe auxiliaire, celle des espaces, ramener la recherche de ce rapport à la construction d'une tangente.

Plus généralement, lorsqu'une quantité variable quelconque dépend du temps, on appelle *vitesse* de cette quantité à un moment donné, le rapport de la variation infiniment petite, positive ou négative, de cette quantité, au temps infiniment petit employé pour produire cette variation; et comme on peut toujours représenter par les ordonnées d'une courbe les valeurs d'une quantité quelconque, puisqu'il suffit pour cela de faire choix d'une échelle arbitraire, on saura trouver par la construction des tangentes aux différents points de cette courbe auxiliaire les valeurs successives de la vitesse de cette quantité.

Par exemple, un corps à une température de 100° est exposé à l'air libre, par une température extérieure de 0°. Ce corps se refroidit. Sa température est ici la quantité variable avec le temps; et la *vitesse de cette quantité* sera plus grande en valeur absolue au commencement de l'observation que vers la fin. La courbe des températures successives présente la forme AB.

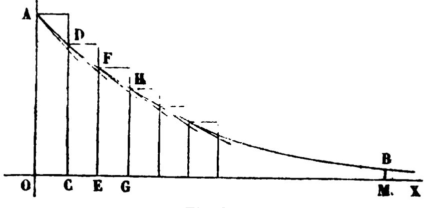


Fig. 27.

A l'origine des temps, c'est-à-dire au point O, qui correspond au commencement de l'expérience, le corps a une température OA = 100°. Il se refroidit d'abord très-rapidement, et sa température est représentée par les ordonnées décroissantes

CD, au bout d'une seconde,
EF, de deux secondes,
GH, de trois secondes, etc.

Au bout d'un certain nombre de secondes, $t = OM$, sa température est représentée par BM, quantité très-voisine de 0°, ou de la température du milieu où se fait l'expérience. La température va donc toujours en diminuant, sans pouvoir toutefois descendre au-dessous de zéro; la *vitesse de la température*, qui est négative, va de même en diminuant en valeur absolue; car la tangente à la courbe au point A est plus inclinée sur l'axe OX que la tangente au point D, celle-ci l'est plus que la tangente au point F,

et ainsi de suite; en B, la tangente est presque horizontale, la diminution de température par unité de temps est alors à peine sensible.

Remarquons que dans ce cas particulier, il existe un point mobile dont le mouvement sur sa trajectoire a précisément les mêmes vitesses que celles de la quantité variable dont nous venons de construire la courbe. Ce point est le sommet de la colonne thermométrique qui sert à mesurer les valeurs successives de la température. La courbe AB est la courbe des espaces relative au mouvement de ce point dans le tube du thermomètre qui lui sert de trajectoire.

21. On concevra d'une manière tout à fait semblable ce qu'on appelle *vitesse d'un angle* variable avec le temps, ou plus simplement *vitesse angulaire*. Si dans un certain temps très-court θ, un angle variable reçoit un accroissement positif ou négatif α, la vitesse de l'angle à ce moment est le rapport $\frac{\alpha}{\theta}$ et la détermination de cette vitesse revient à la construction de la tangente à la courbe dont les abscisses représentent les temps et dont les ordonnées représentent les valeurs correspondantes de l'angle variable.

22. Lorsqu'un point mobile A se meut sur une ligne MN tracée dans un plan, on est souvent conduit en mécanique à considérer les *aires* décrites dans ce plan par la droite mobile CA, menée à chaque instant d'un point fixe du plan à la position occupée par le mobile. Par exemple, entre deux positions M et A, du mobile, le rayon mobile aura décrit l'aire MCA. Cette aire, comptée à partir d'une origine fixe, qui est le rayon CM, est variable avec le temps ; et si nous prenons une position A′ infiniment voisine du point A, elle s'accroîtra pour ce changement de position de l'aire du triangle ACA′, dans lequel le côté infiniment petit, AA′ peut être considéré comme une ligne droite. La *vitesse de l'aire* sera donc le rapport de l'aire de ce triangle au temps θ mis par le mobile à aller du point A au point A′. Or, on peut évaluer la surface de ce triangle : elle est

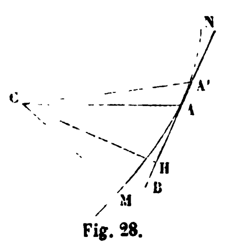


Fig. 28.

égale à la moitié du produit de sa base AA′ par la hauteur abaissée du point C sur cette base, ou par la distance CH du *centre de aires*, C, à la tangente AB menée par le point A à la trajectoire. On a donc :

$$\text{triangle } ACA' = \tfrac{1}{2}\, CH \times AA'.$$

Et divisant par le remps θ :

$$\text{vitesse de l'aire} = \frac{\text{triangle } ACA'}{\theta} = \frac{1}{2}\, CH \times \frac{AA'}{\theta}.$$

Mais $\frac{AA'}{\theta}$ est la vitesse v du mobile. La *vitesse de l'aire* à un moment donné est donc égale à la vitesse v du mobile à ce moment multipliée par la moitié de la distance du centre des aires à la direction de la tangente menée à ce même moment à la trajectoire. Mais ceci suppose expressément que le mouvement du mobile s'accomplisse dans un plan.

La vitesse de l'aire ainsi définie s'appelle quelquefois *vitesse aréolaire*.

Ainsi, lorsqu'un point décrit une circonférence de cercle d'un mouvement uniforme, la *vitesse* de ce point est constante; la *vitesse angulaire* du point autour du centre du cercle est constante aussi, et égale à la vitesse du mobile divisée par le rayon du cercle[1]; enfin la *vitesse aréolaire* du point autour du centre du cercle pris pour centre des aires, est constante et égale au produit de la vitesse du mobile par la moitié du rayon.

Pour distinguer la vitesse d'un point sur sa trajectoire des vitesses d'un angle, d'une aire, etc., on appelle *vitesse linéaire* celle qui exprime le rapport de la variation d'une longueur au temps employé à la produire.

VITESSE DE LA VITESSE, OU ACCÉLÉRATION TANGENTIELLE.

23. Revenons à la courbe des espaces construite pour représenter la loi du mouvement d'un point. Nous avons vu comment

[1] Cette relation suppose que l'on prend pour unité d'angle, conformément à l'usage adopté en analyse, l'angle au centre qui, dans un cercle quelconque, correspond à l'arc dont la longueur est égale au rayon.

on pouvait déduire de cette courbe le tracé de la courbe des vitesses. Cette nouvelle courbe donne par ses ordonnées les vitesses du mobile sur sa trajectoire, aux moments définis par les abscisses correspondantes. La vitesse est ici une quantité généralement variable avec le temps; on peut donc appliquer à cette quantité la définition générale du mot vitesse, et déterminer *la vitesse de la vitesse linéaire*, nouvelle quantité très-utile à considérer en mécanique, et à laquelle on donne le nom d'*accélération tangentielle*. Nous verrons plus tard pourquoi on ajoute cette épithète de *tangentielle* au mot *accélération*.

Soit OX l'axe des temps, OY l'axe commun parallèlement au-

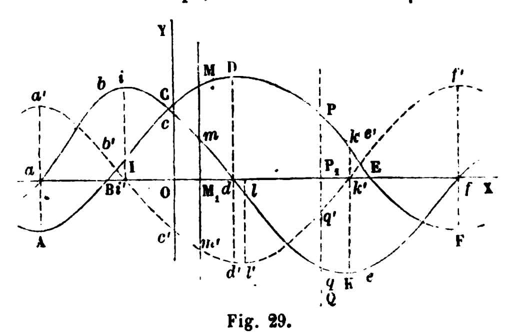


Fig. 29.

quel nous porterons les ordonnées représentatives des espaces décrits, des vitesses, et des accélérations tangentielles.

On donne la *courbe des espaces*, ABCDEF; nous en déduirons la *courbe des vitesses*, *abcdef*, par la considération des tangentes menées à la première courbe.

De la courbe des vitesses *abcdef*, nous pouvons déduire, par un procédé identique, la courbe des *accélérations tangentielles a'b'c'd'e'f'*, dont les ordonnées seront proportionnelles aux rapports des accroissements infiniment petits de la vitesse aux temps pendant lesquels ces accroissements se sont produits.

La courbe *abcdef* coupe l'axe des temps en des points *a*, *d*, *f*, qui sont les projections des points A, D, F, où la courbe des espaces atteint un maximum ou un minimum. Ces points définissent, comme nous l'avons vu, les époques où le mobile s'arrête

sur sa trajectoire pour revenir sur ses pas. Les ordonnées de la courbe des vitesses sont positives entre les points a et d, parce que le mobile a entre ces époques un mouvement direct; elles sont négatives entre d et f, parce que le mouvement du mobile est alors rétrograde.

De même, la courbe $a'b'c'd'e'f'$ coupe l'axe des temps en des points i' et k', projections des points l et k, où la courbe des vitesses atteint un maximum ou un minimum, et des points I et K, où la courbe des espaces a une inflexion. Les ordonnées de la courbe des accélérations sont négatives entre i' et k', parce que, entre les deux époques définies par ces points, la vitesse du mobile diminue ; elles sont positives en dehors de ces régions, parce que la vitesse du mobile augmente. Elles passent par un maximum ou un minimum en l', parce qu'en l, la courbe des vitesses a une inflexion.

Si l'on donnait la loi des accélérations tangentielles, de manière qu'on pût tracer *a priori* la courbe $a'b'c'd'e'f'$, on pourrait revenir de cette courbe à la courbe des vitesses en observant que les aires de la première courbe sont proportionnelles aux accroissements des ordonnées de la seconde ; ce problème est identique à celui que nous avons résolu pour passer du tracé de la courbe des vitesses au tracé de la courbe des espaces. Si pour une certaine valeur particulière du temps, $t_0 = OM_1$, on donne la valeur correspondante $v_0 = M_1 m$ de la vitesse, on n'aura qu'à évaluer l'aire (positive ou négative) de la courbe des accélérations tangentielles à partir de l'ordonnée $M_1 m'$, jusqu'à une ordonnée quelconque PQ. Cette aire, qui sera ici négative et égale en valeur absolue à la surface $M_1 m'q'P_1$, terminée à la courbe $m'd'l'q'$, étant divisée par la longueur T de l'unité de temps prise à l'échelle, donnera ce qu'il faut retrancher de la vitesse de $M_1 m$ pour avoir en grandeur et en signe, la valeur $- P_1 q$ de la vitesse au moment défini par l'abscisse OP_1. La connaissance d'un point m de la courbe des vitesses suffit donc pour construire cette courbe au moyen de celle des accélérations tangentielles. De même, on pourra déduire la courbe des espaces de la courbe des vitesses, dès qu'on connaîtra un point M de la courbe cherchée, c'est-à-dire la valeur de l'arc $s_0 = M_1 M$ correspondante à une valeur particulière, $t = OM$, du temps t.

La connaissance de la loi de l'accélération tangentielle définit entièrement le mouvement d'un mobile sur sa trajectoire, pourvu qu'on connaisse aussi la position du mobile sur sa trajectoire à un moment donné et sa vitesse à ce même moment.

Lorsque la trajectoire est une ligne droite, la tangente à la trajectoire se confond partout avec cette droite elle-même, et l'accélération tangentielle est, comme nous le verrons, la seule accélération à considérer dans le mouvement. Dans ce cas particulier, on peut supprimer l'épithète de *tangentielle* et dire simplement *l'accélération*.

ÉTUDE DU MOUVEMENT UNIFORME.

24. La loi du mouvement uniforme est définie par l'équation

$$s = vt,$$

dans laquelle le coefficient v, qui représente la vitesse, est constant. Cette équation suppose que l'on compte les arcs de la trajectoire à partir de la position qu'occupe le mobile au moment $t=0$: s'il en était autrement, l'équation du mouvement uniforme serait :

$$s = s^{o} + vt,$$

en appelant s_0 la valeur de l'arc s pour $t = 0$, ou à l'origine des temps.

Contruisons la courbe des espaces en prenant, pour simplifier, la première équation. Sur l'axe OX portons bout à bout, à partir du point O, des longueurs OA, AB, BC .., égales à l'unité de temps prise à l'échelle. Les points A, B, C, représenteront des époques correspondantes à $t=1$, $t=2$, $t=3$....

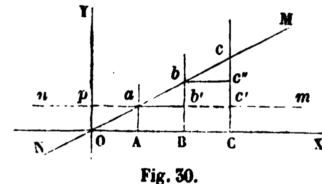


Fig. 30.

Le coefficient constant v exprime l'espace décrit par le mobile

dans l'unité de temps. Les ordonnées correspondantes à $t=1$, $t=2, t=3$, seront respectivement égales à $Aa=v$, $Bb=2v$, $Cc=3v,\ldots$; elles croissent proportionnellement aux abscisses. Tous les points a, b, c, ainsi obtenus, sont sur une même droite OM ; *la ligne des espaces est donc une ligne droite quand le mouvement est uniforme.*

En quelque point qu'on applique la construction géométrique de la vitesse, on trouvera toujours une vitesse constante A*a*, ou *b'b*, ou *c''c*, partout égale à v, ce qu'on savait déjà par la définition même de la vitesse. La *courbe des vitesses* a donc ses ordonnées constantes, et se réduit à une droite *nm*, menée parallèlement à l'axe OX à une distance $Aa=v$.

Il est facile de vérifier en ce cas particulier la relation qui lie les ordonnées A*a*, B*b*, C*c*, de la courbe des espaces aux aires successives *p*OA*a*, *p*OB*b'*, *p*OC*c'* de la courbe des vitesses. Ces aires ont pour valeurs les produits :

$$Op\times OA, \qquad Op\times OB, \qquad Op\times OC,\ldots$$

c'est-à-dire

$$v\times OA, \qquad v\times OA\times 2 \qquad v\times OA\times 3\ldots$$

Si on les divise par la longueur représentative de l'unité de temps, longueur égale ici à OA, on obtient pour quotients :

$$v, \qquad 2v, \qquad 3v\ldots;$$

ce sont les accroissements successifs de l'ordonnée de la courbe des espaces, à partir de l'origine O prise pour l'évaluation des aires, et comme cette courbe a une ordonnée égale à *o* au point O, ce sont les valeurs mêmes des ordonnées de la courbe. On a en effet :

$$Aa=v, \qquad Bb=2v, \qquad Cc=3v\ldots$$

La courbe des vitesses étant dans ce cas particulier une droite parallèle à l'axe des temps, la *vitesse de la vitesse*, ou *l'accélération tangentielle* est constamment nulle, et la ligne qui la représente coïncide avec l'axe OX.

Si au lieu de considérer l'équation $s=vt$, nous avions pris l'équation plus générale $s=s_0+vt$, les résultats que nous

aurions obtenus auraient été identiques ; seulement la droite des espaces, au lieu de passer par l'origine, aurait coupé l'axe OY en un point dont l'ordonnée aurait été égale à s_0.

En résumé, *dans le mouvement uniforme, la ligne des espaces est une droite, la ligne des vitesses est une parallèle à l'axe des temps, la ligne des accélérations tangentielles est l'axe des temps lui-même.*

25. Soit FG une courbe représentative d'un mouvement quelconque effectué par un mobile P sur sa trajectoire MN. OX est l'axe des temps, OY celui des espaces. Prenons deux points C et D sur la courbe et menons la droite HK qui passe par ces deux points. Cette droite peut être considérée comme représentant un mouvement uniforme qui s'opérerait sur la même trajectoire.

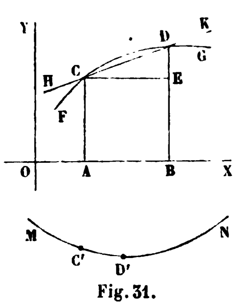


Fig. 31.

Or, on remarquera que le mobile fictif qui subit le mouvement uniforme ainsi défini coïncide avec le mobile réel P aux époques $t = OA$ et $t = OB$, c'est-à-dire aux points C' et D', correspondants sur la trajectoire aux valeurs CA, DB de l'espace décrit. La corde CD représente donc le mouvement uniforme qui amènerait le mobile de sa position C' à son autre position D', dans le temps qu'il emploie effectivement à passer de l'une à l'autre, en vertu de son mouvement varié. La vitesse de ce mouvement uniforme est donnée par le rapport $\frac{DE}{CE}$ ou par le rapport de l'espace total décrit C' D' au temps que le mobile met à le décrire. C'est donc la *vitesse moyenne* du mobile entre les deux époques considérées.

26. Exemple. Un mobile part du repos au point E et parcourt la distance EF avec une vitesse graduellement croissante jusqu'au milieu I de cette distance ; puis, à partir de là, il continue à se mouvoir avec une vitesse graduellement décroissante jusqu'au point F, où il arrive sans vitesse.

OA étant à l'échelle la durée du trajet, la courbe des espaces partira du point O et aboutira au point B à une distance $AB = EF$.

Elle sera tangente en O à l'axe OX, et en B à une parallèle à cet axe, car la vitesse au départ, pour $t = 0$, et à l'arrivée, pour $t = OA$, sont nulles par hypothèse. On peut admettre que le mouvement soit réglé de manière à faire passer le mobile au milieu I de son parcours à la moitié de la durée de ce trajet, ce qui donnera $Oc' = \frac{1}{2} OA$ pour l'abscisse correspondante au passage en I. On sait, par l'énoncé, qu'en ce point la vitesse atteint son maximum ; la courbe des espaces a donc une inflexion au point C. La courbe des vitesses sera représentée, dans ce cas, par une courbe OcA, passant par les points O et A et ayant en c une tangente horizontale, et la ligne $d'c'a'$ des accélérations tangentielles coupera l'axe OX au point c'. On pourra régler le mouvement de manière que cette dernière ligne soit droite. S'il en est ainsi, la courbe des vitesses OcA est une parabole ayant pour axe la ligne c'C, et les trois points O, C, B, sont sur une même ligne droite OB. Cette droite définit le *mouvement uniforme moyen* du mobile entre son départ E et son arrivée F. La vitesse de ce mouvement uniforme est la moyenne de toutes les vitesses successives du mobile ou de toutes les ordonnées de la courbe OcA.

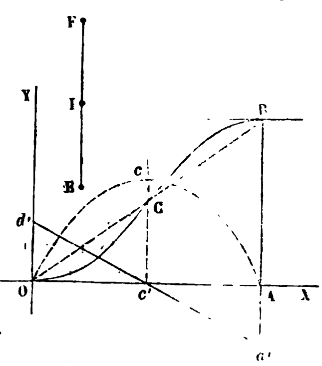


Fig. 32.

La condition du contact de la courbe des espaces en O et en B avec des lignes horizontales est toujours remplie lorsqu'il s'agit du mouvement d'un corps matériel qui part du repos et qui y revient, car il est impossible que la vitesse d'un tel corps passe subitement de la valeur *zéro* à une valeur finie, ou d'une valeur finie à la valeur *zéro ;* elle passe, en réalité, par tous les degrés de vitesse intermédiaires. La substitution d'une droite à la courbe, ou d'un mouvement uniforme moyen au mouvement varié réel, efface cette transition, et fait succéder une vitesse finie à une vitesse nulle. Mais il ne faut pas oublier que cette substitution est entièrement fictive.

APPLICATION. — GRAPHIQUE DES TRAINS.

27. On appelle, dans l'exploitation des chemins de fer, *graphique des trains*, une épure où le mouvement de tous les trains est représenté par des lignes droites.

Pour construire cette épure, on prend sur un axe horizontal 24 parties égales représentant les heures d'une journée, on les subdivise chacune en parties plus petites représentant des intervalles de 10 minutes ; les intervalles plus petits sont appréciés à l'œil. Sur un autre axe, perpendiculaire au premier, on porte des parties proportionnelles aux distances, et l'on place les stations successives de la ligne d'après leur distance à l'origine du chemin. Cette construction permet de couvrir la feuille de l'épure d'un réseau de droites rectangulaires, dont les unes, les droites verticales, correspondent à une heure déterminée de la journée, et les autres, c'est-à-dire les horizontales, à une station déterminée.

Considérons un fragment de l'épure du mouvement des trains.

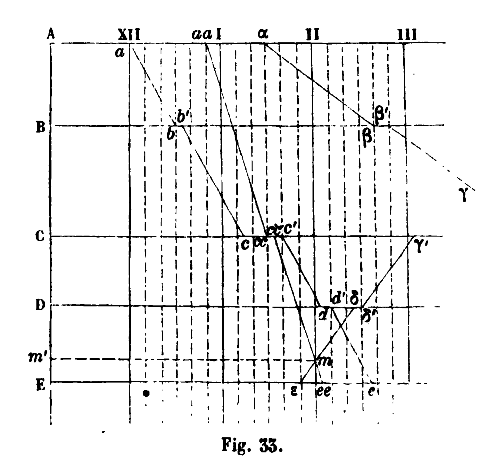


Fig. 33.

Soient A, B, C, D, E les stations réparties sur l'axe vertical à leurs distances respectives ; les verticales équidistantes XII, I,

II, III, représentent les heures de midi, une heure, deux heures, etc.

Un train part de la station A à midi et arrive à la station B à midi 30 minutes. Le mouvement moyen qu'il a pendant ce trajet est représenté par la droite *ab*.

Le train reste 5 minutes dans la station B. Il repart donc à midi 35 minutes. Sa vitesse moyenne étant supposée la même, le mouvement, à partir de la station B, sera représenté par une droite *b'c* parallèle à *ab*. Cette droite vient couper la ligne de la station C au point correspondant à 1 heure 15 minutes. Si le train passe ensuite 25 minutes dans cette station C, il en repart à 1 heure 40 minutes et arrive à la station D à 2 heures 5 minutes ; il en repart à 2 heures 10 minutes et arrive à la station E à 2 heures 35 minutes, et ainsi de suite.

Son mouvement, réduit aux vitesses moyennes en dehors des temps d'arrêts, est donc représenté par la ligne brisée *abb'cc'dd'e*, dont les parties inclinées correspondent à la marche et les parties horizontales au stationnement.

Les trains plus lents seraient représentés par des lignes plus voisines de l'horizontale, telles que le tracé $\alpha\beta\beta'\gamma$...; les trains plus rapides, par des lignes plus voisines de la verticale; tel est le tracé *aaccc'c'ee*. Il correspond à un train rapide, qui part de A à midi 50, qui *brûle* la station B, arrive en C à 1 heure 30 minutes, en repart à 1 heure 35 minutes, brûle la station D et arrive à la station E à 2 heures 5 minutes. On voit que ce train part du point A plus tard que le train *abb'c*..., et qu'il atteint et dépasse ce train dans la station C ; le train *abb'c*... est alors garé et le train rapide repart plus tôt que lui. Le graphique des trains met en évidence ces rencontres de trains de différentes vitesses, et permet de combiner les heures de leurs passages aux divers points d'arrêts, de manière à éviter les collisions.

Les trains qui marchent en sens contraire sont figurés sur l'épure par des lignes inclinées dans l'autre sens. Ainsi, le train $\varepsilon\delta\delta'\gamma'$ part de E à 1 heure 50 minutes, arrive en D à 2 heures 25 minutes, y séjourne 5 minutes et arrive en C à 2 heures 55 minutes. Il croise les deux trains *aaccee* et *abcde*... dans l'intervalle compris entre les deux stations D et E, ce qui n'a pas d'inconvénient si le service est établi sur la double voie entre ces stations. A s'en

rapporter strictement à l'épure, on pourrait déterminer l'heure et le lieu de chacun des croisements. En effet, la droite $c'c'ee$ coupe la droite $\varepsilon\delta$ en un point m qui correspond sur l'axe des distances à un certain point du chemin, bien défini par sa distance Am' à l'origine, et sur l'axe des temps, à un point qui définit une heure bien déterminée. Mais nous avons vu que la substitution d'une droite à la courbe des espaces revient à la substitution d'un mouvement moyen uniforme au mouvement réel qui est nécessairement varié. De sorte qu'en réalité, les lignes du mouvement vrai, au lieu d'être droites, devraient être des courbes sinueuses, analogues à celle que nous avons indiquée dans le paragraphe précédent. Cette altération peut déplacer les points de rencontre des deux lignes, comme on le voit par la figure ci-contre :

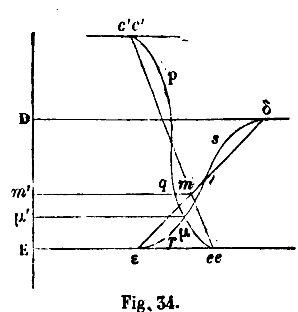


Fig. 34.

Les deux droites $c'c'ee$, $\varepsilon\delta$ se coupent en m. Mais les courbes réelles ont la forme sinueuse, $cc'pqee$, $\varepsilon rs\delta$, et elles se coupent en μ; le point de rencontre est donc déplacé sur la ligne vers le point E de la quantité $m'\mu'$.

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ.

28. Le *mouvement rectiligne et uniforme* est le plus simple de tous les mouvements; c'est celui pour lequel la vitesse est constante, et dans lequel les espaces parcourus croissent proportionnellement au temps. L'accélération est constamment nulle dans ce mouvement. Le *mouvement rectiligne uniformément varié* est de même le plus simple des mouvements variés. C'est celui dans lequel l'*accélération est constante*, et dans lequel *la vitesse croît proportionnellement au temps*. Ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre. En effet, si la vitesse croît proportionnellement au temps, l'accélération, qui n'est autre chose que la vitesse de la

Tra
d
Voyag APHI

253. 6	BAI
245. .	Mus
238. .	Réc
230. 9	SEP
225. 2	Pag
216. .	BLE
204. 9	VIT
198. 8	Loi
187 7	Vitr
172. 2	CH
158. 6	Jalı
147. 6	Oiry
141. 4	ÉPE
134. 5	Dan
125. 9	Port
116. 4	DOI
106. 7 / 103. 2	Vare
94. 5	CHA
83. 8	Nog
73. 8	Nan
65. 2	LA F
57. 4	Cha
50. 2	Tril
44. 7	MEA
36. 2	Esb
27. 4	LAG
18. .	Che
14. . / 12. 8	Rai
10. 3 / 8. 3	NOI
1. 3	LA V

PA 8

Chemins

UE DE L

Trains
de
Marchandises.

BAR-LE-DUC	389.
Mussey	397.6
Révigny	404.6
SERMAIZE	411.7
Pagny-s.-Meuse	417.3
BLESME (*Bifurcation*)	426.6
VITRY-LE-FRANÇAIS	437.7
Loisy	443.8
Vitry-la-Ville	454.9
CHÂLONS (*Bifurcation*)	470.4
Jalons	484.
Oiry	493.
ÉPERNAY (*Bifurcation*)	502.2
Damery	508.1
Port à Binson	516.7
DORMANS	526.2
Varennes	536.5
Mézy	539.4
CHÂTEAU-THIERRY	548.1
Nogent l'Arlaud	558.8
Nanteuil	568.8
LA FERTÉ s. JOUARRE	577.5
Changis	585.
Trilport	592.4
MEAUX	598.5
Esbly	606.5
LAGNY	615.2
Chelles	624.3
Gagny	628.6
Rainey	629.2
NOISY (*Bifurcation*)	632.3
Bondy	633.7
Pantin	
LA VILLETTE	641.3
PARIS.	642.6

MIDI
de
MINUIT

Jäger S. à P.

.esse, est une quantité constante qui indique l'accroissement la vitesse du mobile pendant l'unité de temps. Et réciproquement, dire que l'accélération est constante, c'est dire que la vitesse croît d'une même quantité pendant des temps égaux, ce qui revient à dire qu'elle croît proportionnellement au temps.

Le mouvement uniformément varié est essentiel à considérer dans la mécanique; nous verrons qu'on y ramène tous les autres. C'est de plus une espèce de mouvement qu'on réalise avec une grande facilité; car il suffit de laisser tomber un corps pesant suivant la verticale pour en avoir une image.

L'accélération j du mouvement uniformément varié étant donnée, il est facile d'en déduire la vitesse v, à un moment quelconque, dès qu'on connaît la valeur v_0 de la vitesse à un instant déterminé, pour $t=0$ par exemple. On sait en effet que par chaque unité de temps, la vitesse s'accroît de la quantité j; donc au bout de t unités de temps, la vitesse v_0 se sera accrue de la quantité jt, et la vitesse à ce moment sera représentée par l'expression

$$v=v_0+jt.$$

Cherchons la loi des espaces parcourus. Nous ferons usage pour cela du théorème démontré § 18, et en vertu duquel les variations de l'espace parcouru sont proportionnelles aux aires de la ligne représentative des vitesses. Commençons donc par construire cette ligne, qui est ici une droite AB, définie par son *ordonnée à l'origine* $OA=v_0$, et par son *inclinaison*, qui est égale à j.

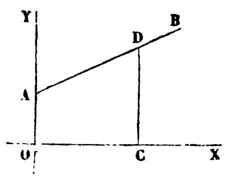


Fig. 35.

Considérons un instant défini par l'abscisse $t=OC$; l'ordonnée CD correspondante sera la valeur de la vitesse à cet instant; et l'aire de la ligne des vitesses, à partir de l'instant $t=0$ jusqu'à l'instant $t=OC$, sera égale à la surface du trapèze AOCD, c'est-à-dire à

$$\tfrac{1}{2}(AO+CD)\times OC.$$

On sait qu'il faut diviser cette surface par la longueur représentative de l'unité de temps pour avoir une longueur égale à

l'espace parcouru par le mobile ; mais cette division se fera tout naturellement en remplaçant la longueur OC par le nombre t d'unités de temps qu'elle représente à l'échelle. Nous avons de plus :

$$AO = v_0,$$
$$CD = v_0 + jt.$$

Donc enfin l'espace parcouru pendant le temps t est donné par l'expression :

$$\tfrac{1}{2}[v_0 + (v_0 + jt)] \times t,$$

ou bien

$$v_0 t + \tfrac{1}{2} jt^2.$$

Si donc s_0 est, à l'instant $t = 0$, la distance du mobile à l'origine prise sur la trajectoire, nous aurons pour déterminer la valeur de la distance au bout du temps t, l'équation :

$$s - s_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2} jt^2.$$

Remarquons que l'accroissement $s - s_0$, ou l'espace parcouru pendant le temps t, se compose de deux parties : l'une, $v_0 t$, est celle qu'aurait décrite le mobile s'il avait conservé pendant tout ce temps la vitesse v_0 qu'il possédait à l'instant $t = 0$; l'autre, jt, ne dépend que de l'accélération j, et serait par conséquent la même si le mobile était parti du repos à l'instant $t = 0$.

La première partie est proportionnelle aux temps, la seconde est proportionnelle aux carrés des temps.

La ligne représentative des espaces est dans ce cas une parabole.

29. Il est facile de déduire de ces formules les lois générales de la chute des corps pesants. On sait par expérience que la pesanteur communique en une seconde à un corps quelconque pris sous la latitude de Paris et à peu de hauteur au-dessus du niveau de la mer, une vitesse de $9^m,8088$; ce nombre est légèrement variable d'un point à l'autre du globe, et on le représente par g ; c'est l'accélération produite par la pesanteur ; les formules du mouvement vertical des corps pesants s'obtiendront donc en remplaçant l'accélération j par le nombre g, et l'on aura :

$$v = v_0 + gt,$$
$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Supposons que le corps tombant parte du repos, et comptons les distances s sur la verticale à partir du point où il a commencé sa chute. Nous aurons à faire $s_0=0$, et $v_0=0$ dans les formules, qui deviendront

$$v = gt,$$
$$s = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Supposons au contraire qu'on lance le corps de bas en haut avec une vitesse v_0, et qu'on demande la hauteur s à laquelle il montera. Les formules seront :

$$v = v_0+gt,$$
$$s = v_0 t+ \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Comptons positivement les distances en descendant au-dessous de l'origine et négativement dans le sens contraire ; v_0 sera négatif, puisque la vitesse initiale est dirigée par hypothèse dans le sens des s négatifs. Remplaçons donc v_0 par $-$ V, V étant la valeur absolue de la vitesse initiale. Il viendra :

$$v = -\mathrm{V} + gt,$$
$$s = -\mathrm{V}t + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Le corps montera jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle ; donc le moment où il cessera de monter sera donné en faisant $v=o$. On en déduit :

$$t = \frac{\mathrm{V}}{g}.$$

Substituant cette valeur de t dans l'autre équation, nous aurons :

$$s = -\frac{\mathrm{V}^2}{g} + \tfrac{1}{2}g \times \frac{\mathrm{V}^2}{g^2} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{V}^2}{g}.$$

C'est la valeur de s à laquelle le mobile lancé de bas en haut s'arrête pour redescendre. Elle est négative, parceque nous comptons négativement les s dans le sens montant à partir de l'origine, et sa valeur absolue est $\frac{\mathrm{V}^2}{2g}$.

Si donc on voulait faire monter verticalement un corps pesant à une hauteur H au-dessus de son point de départ, il faudrait lui imprimer de bas en haut une vitesse V satisfaisant à l'équation :

$$H=\frac{V^2}{2g},$$

ce qui donne en résolvant $V=\sqrt{2gH}$.

CHAPITRE II

DU MOUVEMENT PROJETÉ.

30. L'emploi de la méthode des projections permet de simplifier notablement l'étude des questions de mécanique. On sait que la géométrie descriptive a pour but de ramener à des constructions planes les opérations nécessaires à la solution d'un problème de géométrie de l'espace. De même, la méthode des projections ramène la considération d'un mouvement qui s'accomplit dans l'espace, à celle de mouvements de points situés dans des plans, mouvements plus faciles à étudier. On peut pousser plus loin cette simplification. Car à un mouvement plan, dont la trajectoire est généralement courbe, on peut substituer les mouvements rectilignes des projections du point mobile sur deux axes fixes. La même réduction s'applique à l'espace. Il suffit de projeter le point mobile sur trois axes fixes ; l'étude des mouvements rectilignes des trois projections conduit à la connaissance de tous les éléments du mouvement qu'on s'est proposé d'étudier.

Rappelons d'abord quelques définitions.

31. Étant donnés un plan fixe P, et une droite fixe L, on appelle *projection* d'un point M sur le plan P, le point m où ce plan coupe une droite menée par le point M parallèlement à la droite L.

Lorsque la droite L est perpendiculaire au plan P, la projection est dite *orthogonale :* c'est la convention qu'on fait dans la géométrie descriptive.

Dans tous les cas, la droite Mm, qui joint le point M à sa projection, s'appelle *droite projetante*.

La projection d'une ligne quelconque N sur le plan P est le lieu géométrique des projections sur ce plan des points de la ligne N ; c'est l'intersection du plan P avec une surface cylindrique engendrée par le mouvement d'une droite qui s'appuierait constamment sur la ligne N en restant toujours parallèle à la direction de la droite L.

Lorsqu'un point mobile M parcourt une trajectoire quelconque R, imaginons qu'on projette à chaque instant sur le plan P, par des droites parallèles à la direction L, la position du mobile à cet instant. La projection m du point M pourra être regardée comme un second mobile, qui parcourrait la projection r de la trajectoire R. On dit alors que le *mouvement du point m sur la ligne r est la projection du mouvement du point* M *sur la ligne* R. On voit que si l'on prend des points M, M', M'', sur la trajectoire R, et les projections m, m', m'' de ces points sur la trajectoire r, le mobile réel et le mobile fictif qui en occupe la projection se trouveront simultanément aux points M et m, aux points M' et m', aux points M'' et m''...; que, par suite, le *mobile projeté* mettra autant de temps à aller du point m au point m', que le mobile réel en mettra à aller du point M au point M'.

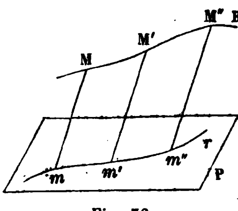


Fig. 36.

PROJECTION SUR UNE DROITE.

32. Étant donnés une droite fixe L, et un plan fixe P, non parallèle à la droite, on appelle *projection* d'un point M sur la droite L le point m où cette droite L rencontre un plan mené par le point M parallèlement au plan P.

Lorsqu'on prend le plan P perpendiculaire à la droite L, la projection est dite *orthogonale*.

La projection d'une ligne quelconque N sur la droite L est la droite L elle-même.

Si, à chaque instant, on projette sur la droite L la position d'un mobile M qui se meut dans l'espace le long d'une trajectoire quelconque R, on obtiendra, en considérant le mouvement rectiligne de la projection du mobile le long de la droite L, un second mouvement, qu'on appellera la *projection* du premier. Les points M, M′, M″... étant des positions successives du mobile sur la trajectoire R, et m, m', m''... leurs projections sur la droite L parallèlement au plan fixe P, le mobile fictif mettra autant de temps à passer de m en m', de m' en m'',... que le mobile réel à passer de M en M′, de M′ en M″...

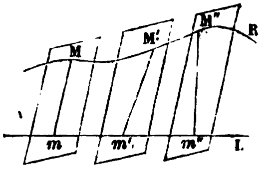


Fig. 37.

REPRÉSENTATION D'UN MOUVEMENT DANS L'ESPACE.

53. Le mouvement d'un point dans l'espace est entièrement défini quand on connaît les projections de ce mouvement, faites sur trois directions fixes parallèlement à des plans donnés. Voici comment on procède à cette définition d'un mouvement.

Par un point O de l'espace on mène trois droites fixes OX, OY, OZ, non contenues dans un seul et même plan ; ces trois droites sont deux à deux dans un même plan, de sorte que le choix arbitraire de ces trois *axes* définit à la fois trois droites OX, OY, OZ, et trois plans YOZ, ZOX, XOY qu'on appelle *plans coordonnés*.

Par un point quelconque M de l'espace, menons trois plans, l'un parallèle à YOZ, l'autre à ZOX, le troisième à XOY.

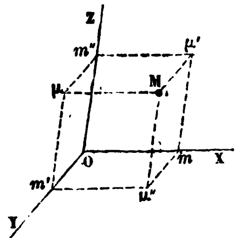


Fig. 38.

Le premier plan coupe l'axe OX en un point m, qui est la *projection* (parallèlement au plan fixe YOZ) du point M sur la droite OX. Il coupe les plans ZOX, XOY, suivant les droites $m\mu'$, $m\mu''$, respectivement parallèles à OZ et à OY.

Le second plan coupe l'axe OY en un point m', projection de M sur OY, parallèlement à ZOX; il coupe de plus les plans XOY, YOZ, suivant les droites $m''\mu$, $m'\mu$, parallèles respectivement à OX et à OZ. Enfin, il coupe le premier plan suivant la droite $M\mu''$, parallèle à l'axe OZ.

Le troisième plan coupe l'axe OZ au point m'', projection de M sur OZ parallèlement à XOY; il coupe les plans YOZ, ZOX, suivant les droites $m''\mu$, $m''\mu'$, respectivement parallèles à OY et à OX; et, enfin, il rencontre les deux premiers plans suivant les droites $M\mu'$, $M\mu$, respectivement parallèles à OY et à OX.

Le solide compris sous ces trois plans et sous les trois plans fixes est un *parallélépipède*, et le point M, dans cette figure, est le sommet opposé à l'*origine* O. Les sommets m, m', m'', situés sur les arêtes aboutissant au point O, sont les *projections* du point M sur les axes; les autres sommets μ, μ', μ'', sont les *projections du point M sur les trois plans fixes*, parallèlement aux axes OX, OY, OZ, qui forment les intersections mutuelles de ces trois plans.

Si, à un instant donné, on fait connaître les distances Om, Om', Om'', de l'origine aux projections sur les trois axes d'un même point M de l'espace, on pourra en déduire la position correspondante de ce point. Il suffit pour cela d'achever le parallélépipède en menant par m, m', m'' des plans respectivement parallèles aux plans coordonnés. Ces trois plans se couperont en un point unique, qui sera le point cherché.

De même, si l'on donnait les projections μ', μ'' du point M sur deux plans coordonnés, on obtiendrait le point M en menant par μ' et μ'' des droites μ' M, μ'' M, respectivement parallèles à OY et OZ : l'intersection de ces deux droites donne le point cherché. La position du point M est donc définie par ses *projections sur deux plans coordonnés*, tandis qu'elle ne peut être définie que par ses *projections sur trois axes coordonnés*. Mais il y a généralement avantage à employer en mécanique la triple projection sur les axes plutôt que la double projection sur les plans.

Non-seulement on ramène ainsi tous les mouvements à des mouvements rectilignes, mais encore les positions des projections m, m', m'', du point M sur les axes sont complétement indépendantes les unes des autres, tandis que les projections μ', μ'', sur deux des plans coordonnés sont assujetties à une condition pour

qu'elles correspondent à un point de l'espace, car elles doivent être toutes deux situées dans un plan parallèle au troisième plan coordonné [1].

Remarquons encore que les distances Om, Om', Om'', peuvent entrer dans les calculs avec l'un des signes $+$ et $-$, suivant qu'elles sont portées sur les axes d'un côté ou de l'autre de l'origine O ; grâce à cette convention, à chaque point M de l'espace correspond une valeur bien déterminée, en grandeur et en signe, des trois distances Om, Om', Om'' ; ces trois distances données en grandeur et en signe font donc connaître la position du point M sans aucune ambiguïté.

On désigne ordinairement par x la longueur Om, prise avec son signe et comptée sur l'axe OX ; par y la longueur Om', prise sur l'axe OY, et par z la longueur Om'', prise sur l'axe OZ. Ce sont les *trois coordonnées* du point mobile. Le mouvement du point M dans l'espace est entièrement défini si l'on donne les valeurs successives de x, de y, et de z en fonction du temps t.

Quand le mouvement a lieu dans un plan, on peut prendre ce plan pour plan des XOY et y mener deux droites OX, OY, qui seront deux des axes coordonnés. Le troisième axe OZ sera dirigé en dehors du plan, et comme le point mobile n'en sort pas, sa coordonnée z sera constamment nulle. Il n'y a donc, dans ce cas particulier, que deux coordonnées variables, x et y, et il suffit pour définir le mouvement de donner leurs valeurs successives en fonction du temps t.

ÉTUDE DU MOUVEMENT DANS L'ESPACE AU MOYEN DES PROJECTIONS DE CE MOUVEMENT SUR LES AXES.

34. Les valeurs des coordonnées x, y, z, en fonction du temps t, définissent trois mouvements rectilignes ; nous pouvons appliquer à chacun d'eux les méthodes géométriques données dans

[1] C'est la condition que l'on rencontre en géométrie descriptive, et en vertu de laquelle les projections d'un même point dans toute épure doivent être situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

le chapitre précédent, et déterminer pour chacun les valeurs des vitesses et des accélérations.

Le premier problème qui se présente ici consiste à déduire des vitesses des coordonnées x, y, z, la grandeur et la direction de la vitesse effective du mobile sur sa trajectoire à ce même instant.

Soit RR′ la trajectoire d'un point mobile, LL′ une droite sur laquelle on projette le mouvement parallèlement à un plan fixe; soient A, A′, deux positions successives très-voisines du mobile sur la ligne RR′, et a, a', les projections de ces deux positions sur la ligne LL′. Nous avons déjà remarqué que le vrai mobile met autant de temps à aller de A en A′ que le mobile idéal représenté par sa projection met de temps à aller de a en a'. Soit V la vitesse du mobile au point A, et v la vitesse du mouvement projeté, nous aurons à la fois :

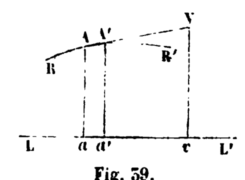


Fig. 59.

$$V = \frac{AA'}{\theta} \quad \text{et} \quad v = \frac{aa'}{\theta},$$

θ étant la durée commune aux deux trajets AA′ et aa'. Donc

$$\frac{V}{v} = \frac{AA'}{aa'}.$$

Or, aa' est la projection sur L de l'élément rectiligne AA ; il y a entre aa' et AA′ un certain rapport qui dépend des situations relatives de ces deux éléments. Le même rapport existant entre les vitesses v et V, nous pourrons dire par analogie que v est la *projection* de V. Nous avons vu que la vitesse v pouvait être considérée comme une longueur portée en A sur la tangente à la trajectoire ; par l'extrémité V de cette longueur, menons un plan projetant, qui rencontrera en v la droite L. Les deux droites AV, av étant rencontrées respectivement aux points A, A′, V, et a, a', v, par trois plans parallèles, sont coupées en parties proportionnelles, et l'on a :

$$\frac{V}{av} = \frac{AA'}{aa'} = \frac{V}{v}.$$

Si donc, $AV = V$, on a aussi $av = v$, de sorte que *la vitesse v du mouvement projeté s'obtient en projetant la vitesse V du mouvement réel.*

La même proposition s'applique à la projection du mouvement sur un plan parallèlement à une droite fixe.

35. Il est aisé maintenant de résoudre le problème que nous nous sommes proposé tout à l'heure.

Soient a, b, c, les projections d'une des positions A du mobile sur sa trajectoire R.

Nous savons par le théorème qui précède que la vitesse du point a est la projection sur OX de la vitesse du mobile au point A ; que la vitesse du point b est la projection de la même vitesse sur OY; qu'enfin la vitesse du point c est la projection de la même vitesse sur OZ. Prenons donc sur les trois axes à partir de a, b, c, des quantités aa', bb', cc', égales ou proportionnelles aux vitesses respectives de ces points, et cherchons le point V qui a pour projections a', b', c' ; la droite AV sera la vitesse demandée en direction et en grandeur. Au lieu de procéder ainsi, nous pouvons mener par le point A trois droites Aa'', Ab'', Ac'', parallèles et égales respectivement à aa', bb', cc', et dirigées dans le même sens. Le plan mené par a' parallèlement au plan YOZ passera par le point a'' ; de même les plans menés par b' et par c', parallèlement à ZOX et XOY, passeront respectivement par b'' et par c''. Ces trois plans achèvent un parallélépipède qui a pour arêtes aboutissant au point A les trois vitesses Aa'', Ab'', Ac'', égales et parallèles aux vitesses aa', bb', cc'. La vitesse cherchée AV est la diagonale de ce parallélépipède. De là résulte ce théorème :

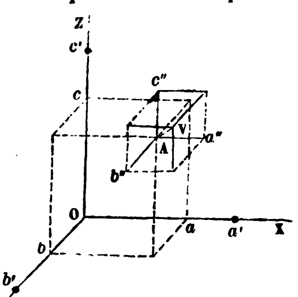


Fig. 40.

La vitesse du mouvement effectif est, à chaque instant, représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélépipède dont les arêtes sont égales et parallèles aux vitesses du mouvement projeté sur les trois axes.

Lorsque le mouvement est plan, le parallélépipède se réduit à

un parallélogramme ; et la vitesse AV est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme dont les côtés Aa'', Ab'', sont égaux et parallèles aux vitesses aa', bb', du mouvement projeté sur les deux axes, OX, OY, et dirigés dans le même sens que ces vitesses.

Fig. 41.

36. On pourrait procéder de même pour les accélérations des mouvements projetés sur les axes ; mais on obtiendrait, non pas l'*accélération tangentielle* du mouvement effectif, la seule que nous ayons encore considérée, mais l'*accélération totale*, que nous étudierons dans un autre chapitre.

37. *Remarque.* Il n'est pas nécessaire, pour trouver la vitesse d'un mouvement réel, de former entièrement le parallélépipède des vitesses des mouvements projetés; il suffit d'en construire les arêtes utiles, savoir Aa'', égale et parallèle à la vitesse de la projection sur l'axe OX, $a''\,b'''$ égale et parallèle à la vitesse de la projection sur l'axe OY, et b''' V, égale et parallèle à la vitesse de la projection sur l'axe OZ. On obtiendra ainsi le sommet V du parallélépipède opposé au sommet A ; AV sera la diagonale de ce parallélépipède et représentera en grandeur et en direction la vitesse cherchée.

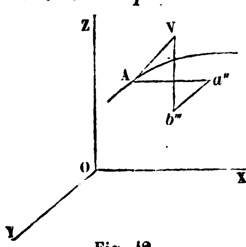


Fig. 42.

Lorsque les axes sont rectangulaires, le parallélépipède devient rectangle, et la grandeur de la vitesse V peut s'obtenir au moyen de l'équation :

$$\overline{AV}^2=\overline{Aa''}^2+\overline{a''b'''}^2+\overline{b'''V}^2;$$

en d'autres termes, le carré de la vitesse du mouvement dans l'espace est la somme des carrés des vitesses des mouvements projetés sur trois axes rectangulaires.

En général, on appelle *résultante géométrique* d'un certain nombre de droites finies, AB, Ac, Ad, Ae, issues d'un même

point A de l'espace, et dirigées chacune dans un sens défini, la droite AE qui joint le point A à l'extrémité E du contour polygonal obtenu en menant par l'extrémité B de la première droite AB, une droite BC égale et parallèle à la seconde droite Ac, et dans le sens même où elle est dirigée; par le point C, une droite CD égale et parallèle à la troisième droite Ad, et dans le même sens que Ad; par le point D, enfin, une droite DE, égale et parallèle à Ae, et dirigée dans le même sens que Ae. La résultante a le sens AE. Les droites Ab, Ac, Ad, Ae, sont appelées les *composantes*, et l'opération prend le nom de *composition*.

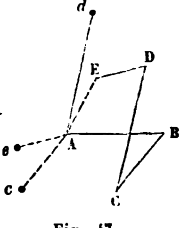


Fig. 43.

Nous verrons plus tard les raisons qui ont conduit à adopter ces définitions.

Nous pouvons dire en nous servant de cette nouvelle expression que *la vitesse du mouvement dans l'espace est la résultante géométrique des vitesses des projections de ce mouvement sur trois axes coordonnés.*

PROJECTION DU MOUVEMENT RECTILIGNE ET UNIFORME.

38. Soient MN une trajectoire rectiligne, et PQ l'axe sur lequel on projette le mouvement parallèlement à un plan donné.

Prenons sur la trajectoire des points A, B, C, équidistants; les projections a, b, c, de ces points sur l'axe PQ, seront aussi équidistantes. Le mobile animé d'un mouvement uniforme le long de la droite MN, parcourt en temps égaux les intervalles égaux AB, BC. La projection du mobile, qui décrit la droite PQ, parcourt dans le même intervalle de temps les espaces égaux ab, bc, pris sur sa trajectoire. Donc *son mouvement est uniforme.* Il en résulte ce théorème : *la projection sur une droite fixe d'un mouvement rectiligne et uniforme est un mouvement uniforme.*

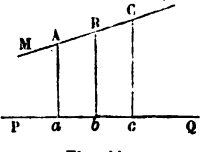


Fig. 44.

Si au lieu de projeter le mouvement sur une droite parallèlement à un plan donné, on projette le mouvement sur un plan P parallèlement à une droite donnée L, *tout mouvement rectiligne dans l'espace aura pour projection un mouvement rectiligne sur le plan.* En effet, la trajectoire du mouvement projeté sera la projection de la ligne droite MM′ que le mobile décrit dans l'espace; elle s'obtiendra donc en menant par la droite MM′ un plan parallèle à la droite fixe L; l'intersection mm' de ce plan avec le plan P sera la droite cherchée. La projection du mobile décrit donc une ligne droite dans le plan P. De plus, on démontrerait comme tout à l'heure qu'en temps égaux la projection du mobile décrit des espaces égaux sur sa trajectoire mm', si le mobile décrit lui-même des espaces égaux en temps égaux sur sa trajectoire MM′. Donc *la projection sur un plan d'un mouvement rectiligne et uniforme est un mouvement rectiligne et uniforme.*

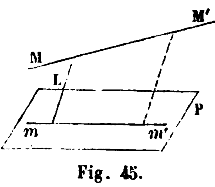


Fig. 45.

39. Nous allons démontrer une proposition inverse.

Lorsque les projections sur trois axes OX, OY, OZ, *du mouvement d'un point* M, *sont des mouvements uniformes, le mouvement du point* M *dans l'espace est rectiligne et uniforme.*

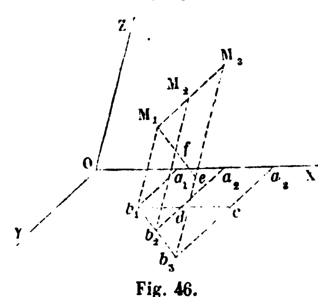


Fig. 46.

Considérons trois positions quelconques M_1, M_2, M_3, du mobile M sur sa trajectoire. Par chacun de ces points menons une parallèle à l'axe OZ jusqu'à la rencontre du plan XOY; par le pied b de cette parallèle, menons une parallèle ba à l axe OY, jusqu'à la rencontre de l'axe OX. Nous formons ainsi trois contours polygoanux,

$$Oa_1\, b_1\, M_1, \quad Oa_2\, b_2\, M_2, \quad Oa_3\, b_3\, M_3,$$

dont les côtés successifs sont les valeurs des coordonnées des trois points M_1, M_2, M_3.

Je dis d'abord que les trois points b_1, b_2, b_3, sont en ligne droite.

Menons, en effet, par le point b_1 une droite $b_1 c$ parallèle à OX : elle coupera en d la droite $a_2 b_2$ et en c la droite $a_3 b_3$; les parallélogrammes $a_1 b_1 da_2$, $a_3 a_1 dc$, nous donnent les égalités :

$$a_1 b_1 = a_2 d = a_3 c,$$
$$b_1 d = a_1 a_2, \quad b_1 c = a_1 a_3.$$

La distance $a_1 a_2$ représente la variation de l'abscisse x du point mobile pendant le temps θ qu'il a mis à se transporter du point M_1 au point M_2 ; pendant ce même temps θ, l'ordonnée y de ce point a passé de la grandeur $a_1 b_1$ à la grandeur $a_2 b_2$; elle a donc varié de la quantité $a_2 b_2 - a_1 b_1 = b_2 d$.

La vitesse de x qui, par hypothèse, est constante, est donc égale à $\frac{a_1 a_2}{\theta}$, et la vitesse de y à $\frac{b_2 d}{\theta}$.

Appelons de même θ' le temps que le mobile met à aller du point M_1 au point M_3 ; les coordonnées x et y varient dans cet intervalle de temps de quantités égales à $a_1 a_3 = b_1 c$ et à $b_3 c$; leurs vitesses sont donc $\frac{a_1 a_3}{\theta'}$ pour la première, et $\frac{b_3 c}{\theta'}$ pour la seconde.

Et comme les mouvements des projections sont supposés uniformes, nous aurons les égalités :

$$\frac{a_1 a_2}{\theta} = \frac{a_1 a_3}{\theta'},$$

$$\frac{b_2 d}{\theta} = \frac{b_3 c}{\theta'}.$$

Divisons ces égalités membre à membre, il viendra la proportion :

$$\frac{b_2 d}{a_1 a_2} = \frac{b_3 c}{a_1 a_3},$$

ou bien

$$\frac{b_2 d}{b_1 d} = \frac{b_3 c}{b_1 c}.$$

Les triangles $b_1 db_2$, $b_1 cb_3$, ont en d et c, des angles égaux comme correspondants ; les côtés qui comprennent ces angles sont proportionnels en vertu de l'égalité précédente. Les deux triangles sont donc semblables, et l'angle $b_2 b_1 d$ de l'un est égal à l'angle $b_3 b_1 c$ de l'autre. Donc, les trois points b_1, b_2, b_3 sont en ligne droite.

On en peut conclure sur-le-champ que les trois point M_1, M_2, M_3, sont situés dans un même plan mené par la droite $b_1 b_2 b_3$ parallèlement à l'axe OZ.

Les points b_1, b_2, b_3, sont les projections des points M_1, M_2, M_3 sur le plan XOY ; nous venons donc de démontrer que le mouvement projeté sur le plan XOY est rectiligne, du moment que les mouvements projetés sur les axes OX, OY sont tous deux uniformes.

On peut ajouter que ce mouvement projeté sur le plan XOY est uniforme.

En effet, θ est le temps que met la projection du mobile sur le plan XOY à parcourir l'espace $b_1 b_2$, et θ' est le temps qu'elle met à parcourir l'espace $b_1 b_3$. Or, les triangles $b_1 b_2 d$, $b_1 b_3 c$, donnent la proportion :

$$\frac{b_1 b_2}{b_1 b_3} = \frac{b_1 d}{b_1 c} = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_3}.$$

Mais $\frac{a_1 a_2}{a_1 a_3} = \frac{\theta}{\theta'}$, car le mouvement projeté sur l'axe OX étant uniforme, les espaces décrits sont proportionnels aux temps mis à les décrire.

Donc $\frac{b_1 b_2}{b_1 b_3} = \frac{\theta}{\theta'}$, et les espaces décrits sur la trajectoire $b_1 b_3$ sont aussi proportionnels aux temps mis à les décrire ; le mouvement projeté sur le plan XOY est par suite un mouvement uniforme.

Nous avons reconnu que la trajectoire réelle $M_1 M_2 M_3$ est contenue dans un plan mené par la droite $b_1 b_2 b_3$ parallèlement à la droite OZ. Il en résulte immédiatement que cette trajectoire est droite et que le mouvement qui s'y opère est uniforme. Remarquons, en effet, que ce que nous avons dit de la figure plane $b_1 b_2 b_3 a_3 a_2 a_1$, nous pouvons le répéter de la figure plane

$M_1 M_2 M_3 b_3 b_2 b_1$. Nous mènerons par le point M_1 une parallèle M_1e à la droite $b_1 b_3$; elle coupera en f l'ordonnée $b_2 M_2$; les longueurs fM_2, eM_3 seront les variations du z du point mobile pendant les temps θ et θ', et nous savons qu'elles sont proportionnelles à ces intervalles de temps ; nous venons de démontrer que $b_1 b_2$, $b_1 b_3$ ou $M_1 f$, $M_1 e$ sont aussi proportionnels à ces mêmes intervalles de temps ; donc, la similitude des triangles M_1fM_2, M_1eM_3 est encore établie, et les trois points $M_1 M_2 M_3$ sont, par conséquent, en ligne droite. Enfin, les espaces $M_1 M_2$, $M_1 M_3$ sont parcourus sur cette droite en des temps égaux respectivement à θ et à θ' ; or, ces temps sont proportionnels aux espaces ; donc, le mouvement du point M est uniforme, et le théorème est démontré.

40. — *Remarque*. Nous avons vu dans le chapitre précédent comment on pouvait trouver la vitesse moyenne d'un point sur sa trajectoire entre deux époques déterminées. Si l'on applique ce procédé aux mouvements projetés sur trois axes OX, OY, OZ, en ayant soin de les considérer chacun entre les mêmes époques, on obtient la vitesse moyenne pour chacun des mouvements projetés, et on détermine ainsi le *mouvement moyen* des projections pendant la période considérée. Mais le mouvement dans l'espace qui, pendant cette même période, a pour projections sur les trois axes les mouvements moyens ainsi déterminés, *n'est pas, en général, le mouvement moyen du mobile sur sa trajectoire*. En effet, le résultat de la composition des trois mouvements moyens, qui sont tous trois rectilignes et uniformes, est lui-même un mouvement rectiligne et uniforme. Soient donc A et A′ les positions du mobile aux deux époques entre lesquelles on a cherché les mouvements moyens des projections ; le mouvement résultant de ces trois mouvements moyens sera *le mouvement uniforme qui s'accomplirait dans le même intervalle de temps le long de la corde* AA′ et non le long de l'arc ABA′.

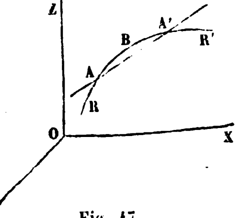


Fig. 47.

Si les points A et A′ sont infiniment voisins, le mouvement moyen résultant s'accomplirait encore suivant la sécante AA′; mais cette sécante, ayant avec la courbe BB′ deux points com-

muns infiniment rapprochés, serait en réalité une tangente à la courbe. *La résultante des vitesses des mouvements projetés est donc dirigée suivant la tangente à la trajectoire*, ce que l'on savait déjà par le théorème du § 35.

PROJECTION SUR UN PLAN D'UN MOUVEMENT DANS L'ESPACE. VITESSE ARÉOLAIRE PROJETÉE.

41. Supposons les trois axes OX, OY, OZ rectangulaires. Soit RR′ la trajectoire d'un point mobile; soient A, A′, deux positions successives du point mobile; *a*, *a′*, les projections de ces positions sur l'axe OX, et *b*, *b′*, les projections des mêmes points sur le plan XOY.

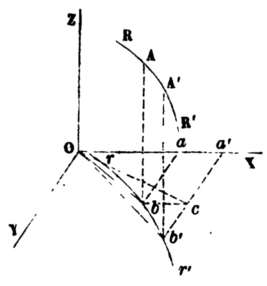


Fig. 48.

Les points *a* et *a′* seront aussi les projections sur OX des points *b* et *b′*, pieds des perpendiculaires abaissées de A et A′ sur le plan XOY.

Soit *rr′* la projection sur ce plan de la trajectoire RR′. Menons du point O des droites O*b*, O*b′* aux positions successives de la projection du mobile. Le rayon mobile, allant du point O à la projection du mobile sur le plan XOY, engendre une aire qui s'accroît de la surface du triangle très-petit *b*O*b′* lorsque le mobile passe du point A au point A′. Si donc θ est le temps qu'il met à parcourir l'arc AA′, la *vitesse de l'aire projetée* sera égale au rapport.

$$\frac{\text{surf. } b\text{O}b'}{\theta}.$$

On peut exprimer cette vitesse en fonction des coordonnées $x = \text{O}a$, $y = ab$ du mobile au point A, et des vitesses de ces coordonnées.

Par le point *b*, menons *bc* parallèle à OX, et joignons O*c*. Nous aurons :

$$\text{surf. } b\text{O}b' = \text{surf. O}cb' - \text{surf. O}cb - \text{surf. } bcb'.$$

Mais le triangle bcb' a deux dimensions infiniment petites, tandis que les triangles bOb', Ocb', Ocb, n'ont qu'une dimension infiniment petite. On a donc, avec une exactitude d'autant plus grande que l'arc bb' ou l'arc AA' est supposé plus petit,

$$\text{surf. } bOb' = \text{surf. } Ocb' - \text{surf. } Ocb.$$

Le triangle Ocb' a pour base cb', et pour hauteur Oa', ou $x + aa'$; il a donc pour surface :

$$\tfrac{1}{2}\, cb' \times (x + aa').$$

Le triangle Obc a de même pour base bc ou aa', et pour hauteur $ba = y$; il a donc pour mesure :

$$\tfrac{1}{2}\, aa' \times y.$$

Donc

$$\text{surf. } bOb' = \tfrac{1}{2}\, cb' \,(x + aa') - \tfrac{1}{2}\, aa' \times y.$$

Divisons par θ, et observons que $\dfrac{cb'}{\theta}$ est la *vitesse* v_y de l'ordonnée y, et que $\dfrac{aa'}{\theta}$ est la vitesse v_x de l'abscisse x. Il viendra

$$\textit{vitesse aréolaire projetée} = \frac{\text{surf. } bOb'}{\theta} = \frac{1}{2}\,[v_y\,(x + aa') - v_x\, y].$$

aa' est infiniment petit, on doit donc le supprimer devant x, et l'on a en définitive

$$\textit{vitesse aréolaire projetée} = \tfrac{1}{2}\,(xv_y - yv_x).$$

Cette formule est générale pourvu qu'on fasse attention aux signes. Nous savons déjà dans quels cas x et y sont positifs, et dans quels cas ils sont négatifs. Les vitesses v_x, v , sont positives si le mouvement projeté sur les axes s'opère dans le sens qui accroît les coordonnées x et y. Enfin, la vitesse aréolaire projetée est positive, si le rayon Ob se meut autour du point O dans le sens qui amènerait l'axe OX vers l'axe OY.

Sur les autres plans, la vitesse aréolaire projetée serait donnée par des formules analogues :

Sur le plan YOZ... $\frac{1}{2}(yv_z - zv_y)$,
Sur le plan ZOX... $\frac{1}{2}(zv_x - xv_z)$.

Le sens positif des aires projetées sur le plan YOZ est le sens de OY vers OZ, et sur le plan ZOX, de OZ vers OX.

On voit donc que la connaissance des coordonnées x, y, z, d'un point mobile M et de leurs vitesses à un instant donné, permet de trouver les vitesses à cet instant des aires décrites sur les trois plans coordonnés par les projections sur ces plans du rayon mobile OM. Mais les formules obtenues supposent les coordonnées rectangulaires.

EXEMPLE DE MOUVEMENT PROJETÉ. PROJECTION SUR UN DIAMÈTRE DU MOUVEMENT UNIFORME D'UN POINT QUI PARCOURT UNE CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

42. Nous supposons qu'un mobile M parcourt dans le sens de la flèche, avec une vitesse constante V, la circonférence d'un cercle AB. On demande de déterminer la vitesse du point P, projection orthogonale du mobile M sur le diamètre fixe AB.

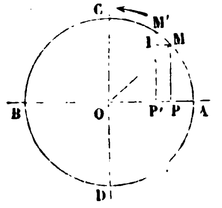


Fig. 49.

Nous désignerons par v la vitesse cherchée; et nous conviendrons de la regarder comme négative si elle est dirigée dans le sens AB; et comme positive, si elle est dirigée en sens contraire. Pour la déterminer, considérons le mobile dans une position M′ très-voisine du point M; la position correspondante du mobile projeté sera le point P′, très-voisin du point P. La vitesse du premier mobile M est connue : elle est égale à V, et si l'on appelle θ le temps que le mobile met à passer du point M au point M′, on aura :

$$MM' = V\theta.$$

On aura de même :

$$PP' = -v\theta.$$

en mettant le signe — devant v, parce que la vitesse de P est dirigée dans le sens négatif PO, ce qui rend v négatif. Par suite,

$$\frac{v}{V} = -\frac{PP'}{MM'}.$$

On obtiendra donc la vitesse v en cherchant la valeur du rapport $\frac{PP'}{MM'}$ lorsque le point M′ est infiniment près du point M.

L'arc MM′ se confond alors avec un élément de la tangente au cercle au point M ; il est donc perpendiculaire au rayon OM. Abaissons du point M une perpendiculaire MI sur M′ P′ ; cette droite MI sera parallèle à PP′, et par suite sera égale à PP′, comme côtés opposés dans un même rectangle. Donc

$$\frac{PP'}{MM'} = \frac{MI}{MM'}.$$

Or les triangles M′IM, OPM sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, et l'on a la proportion :

$$\frac{MI}{MM'} = \frac{MP}{OM}.$$

Donc

$$v = -V \times \frac{MP}{OM}.$$

OM est une quantité constante, égale au rayon OA du cercle. La formule précédente indique donc que v, vitesse du point Q est proportionnelle à l'*ordonnée* MP de la circonférence.

La vitesse du mouvement projeté est donc nulle au passage du mobile M au point A ; elle croît en valeur absolue jusqu'à ce que le mobile M ait atteint le point C, extrémité du premier quadrant. Alors elle est égale à V, car l'ordonnée MP devient égale

à OC, rayon du cercle. Lorsque le mobile a dépassé le point C, la vitesse négative décroît en valeur absolue, et se retrouve nulle quand il atteint le point B. Au delà de B, la projection a un mouvement rétrograde, la vitesse change donc de signe et devient positive de B vers A ; en même temps, l'ordonnée MP est dirigée de haut en bas, et doit entrer dans les calculs avec le signe négatif. Si donc on désigne par y l'ordonnée MP du point M, *prise avec le signe + ou le signe —, suivant qu'elle est située au-dessus ou au-dessous du diamètre* BA, on pourra poser l'équation générale :

$$v = -\frac{Vy}{R},$$

R étant le rayon OA du cercle donné.

Proposons-nous de trouver l'accélération j du mouvement du point P. Nous savons que cette accélération est la vitesse de la vitesse v. Or, v est le produit de l'ordonnée y par un facteur constant $-\frac{V}{R}$. La vitesse de v est donc le produit du facteur $-\frac{V}{R}$ par *la vitesse de y*, qui reste à déterminer.

Lorsque le mobile qui parcourt la circonférence passe de M en M', l'ordonnée y s'accroît de la quantité M'I, de sorte que la *vitesse de y* est la limite du rapport $\frac{M'I}{\theta}$ lorsque MM' décroît indéfiniment. Les triangles semblables M'IM, OPM, donnent l'égalité :

$$\frac{M'I}{MM'} = \frac{OP}{OM}.$$

Donc

$$M'I = \frac{OP}{OM} \times MM',$$

et divisant par θ,

$$\frac{M'I}{\theta} = \text{vitesse de } y = \frac{OP}{OM} \times V = \frac{Vx}{R}.$$

en appelant x l'*abscisse* OP du point M. Il est facile de voir que la formule est générale pourvu que l'on prenne l'abscisse x avec le signe $+$ si elle est portée à droite du point O, et avec le signe $-$ si elle est portée en sens contraire.

La *vitesse de l'ordonnée* est donc représentée en grandeur et en signe par l'expression $\frac{Vx}{R}$, et comme l'accélération j du point P est le produit de cette vitesse par $-\frac{V}{R}$, il en résulte qu'on a :

$$j = -\frac{Vx}{R} \times \frac{V}{R} = -\frac{V^2x}{R^2}.$$

L'accélération du point P est donc négative tant que le point P reste compris entre A et O, et positive quand il est compris entre O et B. Elle est proportionnelle à la distance OP. Lorsque le mobile P est au point A, $x = R$, et l'accélération j est égale à $-\frac{V^2}{R}$; elle est nulle quand le point P passe au point O.

En définitive, la vitesse du point P est proportionnelle à l'ordonnée MP du point du cercle qui a OP pour abscisse, et l'accélération, toujours dirigée de P vers le centre O, ou, comme on dit, toujours *centripète*, est proportionnelle à l'abscisse OP.

Proposons-nous de construire la *courbe des espaces*, qui définit le mouvement du point P ; puis la *courbe des vitesses*, et, enfin, la *courbe des accélérations*.

Pour cela, observons que le temps t, compté à partir de l'un des moments où le point M passe au point A est proportionnel à l'arc AM décrit par le mobile à partir de ce moment ; on a en effet :

$$\text{arc AM} = Vt.$$

Donc

$$t = \frac{\text{arc AM}}{V}.$$

Cela revient pour ainsi dire à admettre que OM est l'aiguille d'un quadrant, sur lequel on lit les heures.

Sur une droite indéfinie A′ X, prenons des longueurs A′ C′ = C′ B′ = B′ D = D′ A'_1 =.... égales au développement des quadrants successifs AC, CB, BD. .... Ce sera l'échelle des temps ; A′ C′ repré-

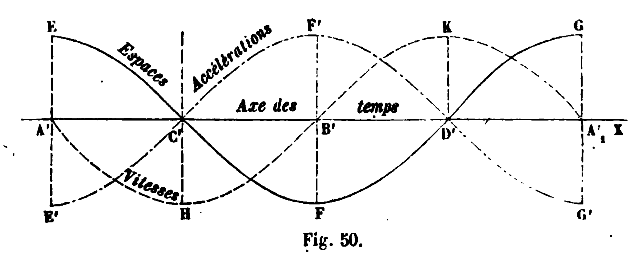


Fig. 50.

sentera le temps nécessaire au mobile M pour aller de A en C, de C en B....

Prenons le point O pour origine des espaces décrits par le point P.

Pour $t = 0$, ou pour le moment du passage du point M au point A, le point P est à une distance OA = R de l'origine O. Nous porterons donc au point A′ une ordonnée A′E, positive et égale au rayon OA.

Quand M passe en C, le point P coïncide avec le point O; donc, pour $t =$ C′A′, l'ordonnée de la courbe des espaces est nulle.

Pour $t =$ A′ B′, c'est-à-dire au moment où le mobile M passe au point B, le mobile P se trouve à une distance OB = R de l'origine dans le sens négatif. Nous porterons donc l'ordonnée B′ F = R dans le sens des ordonnées négatives.

La courbe repasse au point D′ pour indiquer que le point P coïncide avec le point O lorsque le mobile M passe au point D.

Enfin, quand M a achevé sa révolution entière, et est revenu au point A, le point P se retrouve en A à une distance positive OA = R de l'origine. La courbe passe donc par le point G, dont es coordonnées sont A'_1 G = R et A′A'_1 = circonférence OA.

Au delà, le tracé se répète indéfiniment pour chaque révolution successive du mobile M. Le mouvement du point P est un mouvement oscillatoire du point A au point B avec retour du point B au point A, qui se reproduit indéfiniment d'une manière périodique.

La courbe indéfinie ainsi obtenue est appelée une *sinusoïde*.

La courbe des vitesses peut se déduire directement de la courbe des espaces; mais on peut aussi employer la formule

$$v = -\frac{Vy}{R},$$

y étant l'ordonnée MP prise dans le cercle. Cette nouvelle courbe passera aux points A′, B′, A'_1, et sera une nouvelle sinusoïde $A'HB'KA'_1$; on peut, en faisant choix d'une échelle convenable des vitesses, laisser de côté le facteur constant $\frac{V}{R}$ et, alors, la sinusoïde des vitesses sera la sinusoïde des espaces, déplacée vers la gauche de la quantité C′A′ égale à un quadrant. De même, la courbe des accélérations, abstraction faite du facteur constant $\frac{V^2}{R^2}$, dont on peut tenir compte par une division convenable de l'échelle des accélérations, sera la sinusoïde des vitesses déplacée d'un quadrant vers la gauche et occupant la position E′C′F′D′G′, ou encore la sinusoïde des espaces renversée autour de l'axe des temps.

Si nous voulions la vitesse moyenne du point P dans son trajet du point A au point B, il faudrait diviser l'espace parcouru $AB = 2R$ par le temps T mis à le parcourir ; or, ce temps T est la durée du trajet du mobile M du point A au point B, suivant la circonférence ACB ; donc

$$ACB \text{ ou } \pi R = T \times V$$

et

$$T = \frac{\pi R}{V}.$$

La vitesse moyenne du point P, *dans une de ses oscillations simples*, est donc égale à

$$\frac{2R}{\left(\frac{\pi R}{V}\right)} = \frac{2V}{\pi}.$$

Le nombre π étant égal à très-peu près à $\frac{22}{7}$, on voit que la vitesse moyenne du point P dans une de ses oscillations simples est à peu près les $\frac{7}{11}$ de la vitesse V du mobile M.

Les valeurs absolues extrêmes de la vitesse du point P sont 0 et V.

CHAPITRE III

DU MOUVEMENT RELATIF

43. Les mouvements dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent étaient des *mouvements absolus*, c'est-à-dire des transports effectifs d'un point mobile en divers points géométriques de l'espace. Nous avons vu qu'on peut les définir en donnant en fonction du temps les valeurs successives des coordonnées x, y, z, du point mobile par rapport à trois axes fixes.

Nous allons étudier dans ce chapitre le *mouvement relatif* ou *mouvement apparent ;* il diffère du mouvement absolu en ce qu'au lieu de chercher la trajectoire et les vitesses du mobile dans l'espace absolu, ou par rapport à des axes fixes, on cherche la trajectoire et les vitesses du mobile relativement à des points ou à des axes qui sont eux-mêmes animés d'un certain mouvement.

44. Un exemple éclaircira cette nouvelle image.

Un voyageur se promène sur le pont d'un bateau qui se meut le long d'une rivière. On peut considérer le mouvement relatif du voyageur par rapport au bateau ; c'est ce mouvement qui amène successivement le voyageur de l'arrière à l'avant, de l'avant à l'arrière, du côté droit au côté gauche, etc. Tous ces mouvements sont caractérisés par une trajectoire qu'on pourrait tracer sur le pont du bateau et par certaines vitesses le long de cette trajectoire ; la vitesse propre du bateau sur la rivière n'intervient en rien dans la détermination des éléments de ce mouvement ; c'est un mouvement relatif pour l'étude duquel on peut supposer que le bateau reste fixe, en faisant abstraction du mouvement qu'il possède sur la rivière.

Si l'on connaît le mouvement du bateau et le mouvement du voyageur par rapport au bateau, il est clair qu'on pourra en déduire le mouvement du voyageur par rapport aux bords de la rivière ; on saura trouver, en effet, à chaque instant, la position exacte du bateau par rapport aux rives, et, sur le bateau, la position exacte du voyageur ; en reportant ces indications sur le plan de la rivière, on y tracera la suite des positions occupées par le voyageur ; ce sera la trajectoire du voyageur par rapport aux rives, et le mouvement du voyageur sur cette trajectoire sera connu, puisqu'on saura l'heure de son passage aux divers points de cette trajectoire. En résumé, *de la connaissance du mouvement relatif du voyageur par rapport au bateau, et du mouvement du bateau par rapport aux rives, on peut déduire le mouvement du voyageur par rapport aux rives.*

Ce dernier mouvement serait le mouvement absolu du voyageur si les rives étaient immobiles. Or, on sait qu'il n'en est rien et que la terre entière est animée d'un certain mouvement dans l'espace. Connaissant le mouvement du voyageur par rapport aux rives et le mouvement absolu de la terre, on en déduirait de même les positions successives du voyageur dans l'espace, c'est-à-dire on déterminerait le mouvement absolu du voyageur.

Tous les mouvements que nous observons à la surface de la terre ou dans le ciel sont des mouvements apparents ; l'observateur n'a pas conscience du mouvement d'entraînement qu'il subit.

45. Proposons-nous de résoudre d'une manière générale le problème suivant :

Connaissant le mouvement d'un point M *relativement à un système* S, *dit système de comparaison, qui est lui-même mobile dans l'espace, et connaissant le mouvement absolu de ce système* S, *trouver le mouvement absolu du point* M.

Le mouvement absolu du système de comparaison auquel on rapporte le mouvement relatif du point M, est appelé *mouvement d'entraînement.*

Le point M décrit par rapport au système S une certaine trajectoire T, qui est sa trajectoire relative ; au bout d'intervalles de temps égaux entre eux, il occupe sur cette trajectoire les positions A_1, A_2, A_3, A_4....

Mais la trajectoire relative fait partie du système S et participe

à son mouvement d'entraînement. Elle occupe donc successivement, au bout des mêmes intervalles de temps, les positions T_1, T_2, T_3, T_4. Le mobile pendant le premier intervalle de temps, passe de A_1 en A_2 sur sa trajectoire relative ; pendant le même temps, la trajectoire passe de la position T_1 à la position T_2 ; par suite la position réelle du mobile, au bout de ce temps, est le point B_2. On reconnaîtra de même qu'au bout du second intervalle de temps, le mobile sera en C_3, et au bout du troisième en D_4. La *trajectoire absolue* est donc la ligne A_1 B_2 C_3 D_4, et le mouvement du mobile est entièrement défini, puisqu'on sait que dans le premier intervalle de temps il passe de A_1 en B_2, dans le second de B_2 en C_3, dans le troisième de C_3 en D_4, etc.

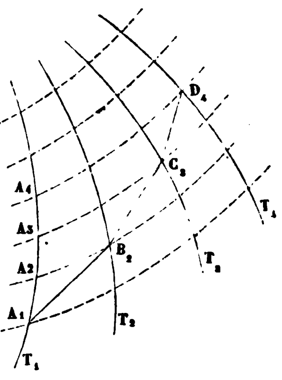


Fig. 51.

La relation qui lie la vitesse relative et la vitesse absolue du point M se déduit de cette construction de la trajectoire absolue.

Soit θ un temps infiniment petit, pendant lequel le mobile M passe sur sa trajectoire relative de la position M à la position M_1 infiniment voisine. Pendant ce même temps θ, la trajectoire se déplace d'une quantité infiniment petite et vient occuper la position T_1. Le point géométrique M de la trajectoire passe en M_1, après avoir décrit en vertu du mouvement d'entraînement l'élément rectiligne MM_1. Dans le même intervalle infiniment petit θ, le point mobile passe en réalité du point M au point N, situé sur la ligne T_1, à une distance $M_1N = MM'$ du point M_1; il décrit donc dans son mouvement absolu la *diagonale* MN du parallélogramme MM_1NM' construit sur les chemins MM', MM_1, dont l'un MM' est décrit par le mobile dans son mouvement relatif, et dont l'autre serait décrit

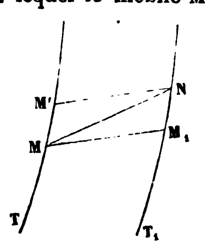


Fig. 52.

par le mobile si, pendant le temps θ, il était entraîné par le mouvement du système de comparaison S.

Les directions MM′, MN, MM_1, sont les directions des vitesses du point M : MM′ est la direction de la *vitesse relative*, MN, celle de la *vitesse absolue*, et MM_1, celle de la *vitesse d'entraînement du point du système* S *avec lequel coïncide le point* M au commencement du temps θ considéré.

Les grandeurs des vitesses sont données par les rapports $\frac{MM'}{\theta}$, $\frac{MN}{\theta}$, $\frac{MM_1}{\theta}$; elles sont donc proportionnelles aux longueurs MM′, MN, MM_1, des éléments eux-mêmes, ou aux côtés de l'un des triangles MM_1N, MM′N. A la figure MM_1NM', qui est infiniment petite, on peut substituer une figure semblable de dimensions finies, sans altérer les rapports cherchés.

En définitive, la *vitesse absolue* V du point M à un moment quelconque est représentée en grandeur et en direction par la diagonale MV d'un parallélogramme, dont les côtés Mv, Mu, représentent en grandeur et en direction le premier la *vitesse relative*, v, du point M, le second la *vitesse d'entraînement*, u, du point géométrique du système de comparaison avec lequel le mobile M coïncide au même moment.

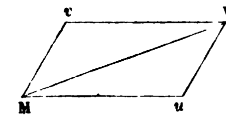


Fig. 53.

Ce théorème s'exprime plus brièvement de la manière suivante :

La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

46. Si l'on donne en grandeur et en direction la vitesse absolue MV et la vitesse d'entraînement Mu, il est facile d'en déduire la vitesse relative ; en effet, la vitesse relative Mv sera égale et parallèle à la droite uV, qui achève le triangle MuV. On peut dire aussi que *la vitesse relative* Mv *est la résultante de la vitesse absolue* MV *et de la vitesse d'entraînement* Mu', *prise en sens contraire.*

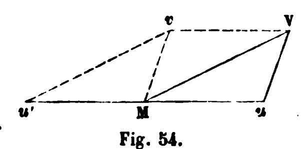


Fig. 54.

En effet, si l'on prend $Mu' = Mu$ sur le prolongement de la droite uM, et qu'on joigne $u'v$ et vV, la figure $MVvu'$ sera un parallélogramme dont Mv sera la diagonale.

On prouverait de même que *la vitesse d'entraînement est la résultante de la vitesse absolue, et de la vitesse relative changée de sens.*

47. Nous avons supposé pour résoudre cette question que le mouvement d'entraînement était un mouvement absolu. Mais le théorème subsiste encore si le mouvement d'entraînement est lui-même un mouvement apparent ou relatif, de sorte qu'on peut le généraliser de la façon suivante :

Lorsqu'un point M *est un mouvement relatif par rapport à un système de comparaison* S, *qui a, par rapport à un second système* S', *fixe ou non fixe, un mouvement relatif connu, la vitesse relative du point* M *par rapport au système* S' *est la résultante de la vitesse relative du même point par rapport au système* S, *et de la vitesse relative d'entraînement du point du système* S *qui, à l'instant considéré, coïncide avec le point* M, *par rapport au système* S'.

Si donc on connaît le mouvement absolu du système S', et le mouvement relatif du système S par rapport à S', et enfin le mouvement relatif du point M par rapport au système S, on pourra trouver le mouvement absolu du point M *par la composition de ces trois mouvements ;* la vitesse absolue de M sera la résultante de la vitesse relative de M par rapport à S, de la vitesse relative de S par rapport à S', et de la vitesse absolue de S'.

Par le point M, menons une droite Mu', qui représente, en direction et en grandeur, la vitesse u' du point du système S' qui coïncide à un certain instant avec le point mobile M ; par l'extrémité u' de cette vitesse, menons $u'u$, qui représente en grandeur et en direction la vitesse relative, u, par rapport au système S', du même point, considéré comme appartenant au système S. La droite Mu représentera, en vertu du théorème du § 45, la grandeur et la direction de la vitesse absolue du point M du système S. Soit enfin uV une droite menée par l'extrémité u de la vitesse $u'u$, et représentant en grandeur et en direction la

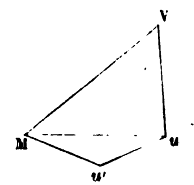


Fig. 55.

vitesse v du mobile M relativement au système S. La vitesse absolue du mobile M s'obtiendra en joignant MV, c'est-à-dire en composant les deux vitesses Mu, uV, ou encore en composant les trois vitesses Mu', $u'u$, uV. La même construction s'applique à autant de vitesses d'entraînement qu'on voudra.

48. Dans cet exemple et dans tous les cas analogues, le point M subit à la fois plusieurs mouvements; à chacun de ces mouvements appartient une vitesse particulière définie en direction et en grandeur; et la vitesse absolue du point M est la résultante des vitesses particulières qu'il aurait si on le supposait successivement soumis à chacun de ces mouvements considéré seul. C'est dans ce sens qu'on dit que ces vitesses particulières *coexistent* pour le point M. Un point en mouvement peut être considéré comme animé de plusieurs mouvements simultanés; il suffit pour cela que la vitesse du point dans l'espace soit la résultante des vitesses particulières correspondantes à chacun de ces mouvements simultanés, abstraction faite de tous les autres.

49. Supposons qu'un mobile se déplace le long d'une trajectoire AA′, rapportée à trois axes fixes OX, OY, OZ. Projetons sur les trois axes, parallèlement aux plans coordonnés, deux positions très-voisines A, A′, du mobile sur sa trajectoire et soit θ le temps très-court qu'il met à parcourir l'arc AA′; puis, construisons le contour ABCA′, formé de trois éléments rectilignes, respectivement parallèles aux trois axes, et aboutissant aux extrémités A et A′ de l'élément décrit. L'élément AB sera l'accroissement de l'x du point A pendant le temps θ; BC sera l'accroissement de l'y, et CA′ l'accroissement du z, de sorte que la vitesse absolue V du point A est, comme nous l'avons déjà observé, la *résultante des vitesses projetées*, V_x, V_y, V_z, qui sont égales respectivement à $\frac{AB}{\theta}$, $\frac{BC}{\theta}$, $\frac{CA'}{\theta}$.

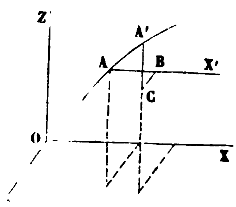


Fig. 56.

Nous pouvons donc, en vertu de notre nouvelle définition des mouvements simultanés, regarder les trois vitesses V_x, V_y, V_z, *comme coexistant pour le point mobile;* cette manière de conce-

voir le mouvement revient à admettre que l'une de ces vitesses est une vitesse relative, et que les deux autres sont des vitesses d'entraînement. On peut supposer par exemple que le point A se meuve avec la vitesse V_x sur une droite AX', parallèle à l'axe OX; que pendant le temps θ, que le mobile met à passer du point A au point B sur cette trajectoire relative, la droite AX' soit animée dans le plan horizontal d'un mouvement d'entraînement relatif, qui fasse décrire à chacun de ses points, parallèlement à l'axe OY, un élément égal à BC; qu'en outre, le plan horizontal dans lequel est située la droite AB, soit animé d'un second mouvement d'entraînement, parallèle à l'axe OZ, et en vertu duquel chacun de ses points décrive pendant le même temps θ un élément égal à CA'. La coexistence de ces trois mouvements équivaut au transport effectif du mobile du point A au point A'.

Les problèmes de mécanique se simplifient beaucoup par cette décomposition d'un mouvement en plusieurs autres qu'on suppose coexister dans le premier. On fait aussi un usage fréquent de la proposition suivante, qui est une sorte d'axiome : *Le mouvement relatif de deux systèmes l'un par rapport à l'autre n'est pas altéré lorsqu'on imprime à ces deux systèmes un mouvement d'entraînement commun.*

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT RELATIF.

50. Soient AB, CD les rives parallèles d'un fleuve; l'eau de ce fleuve s'écoule par filets parallèles, dans le sens de la flèche, avec une vitesse constante u.

Un nageur, parti du point E de la rive CD, traverse la rivière en imprimant à son corps une vitesse v connue en grandeur et en direction par rapport à l'eau dans laquelle il nage.

On demande en quel point F le nageur atteindra l'autre rive AB.

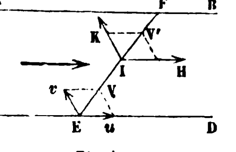


Fig. 57.

Le mouvement du nageur, du point E au point F, peut être considéré comme un mouvement absolu,

en faisant abstraction du mouvement d'entraînement commun qui emporte la terre dans l'espace.

La vitesse absolue du nageur est la résultante de la vitesse relative v du nageur par rapport à l'eau et de la vitesse d'entraînement u de l'eau ; on obtiendra donc la direction cherchée EF en construisant au point E le parallélogramme $uEvV$, dont les côtés Eu, Ev sont respectivement égaux et parallèles à la vitesse d'entraînement et à la vitesse relative ; la diagonale EV représentera en grandeur et en direction la vitesse absolue du nageur, et le point cherché, F, sera l'intersection de la rive AB avec le prolongement de cette diagonale.

En un point quelconque I de la trajectoire absolue EF, la vitesse absolue IV′ se décompose en deux vitesses, l'une IH, qui est la vitesse d'entraînement u ; l'autre IK, qui est la vitesse relative du nageur par rapport à l'eau, égale et parallèle à la vitesse v.

Cette vitesse v est la seule vitesse qui coûtera des efforts au nageur.

Le nageur, en se mettant à l'eau en un point E, donné, peut se proposer d'atteindre un point F déterminé de l'autre rive ; dans ce cas, il doit régler la direction et la grandeur de la vitesse relative v qu'il imprime à son corps, de manière que la résultante de v et de u, construite au point E, ait une direction passant par le point F. Prenons donc sur la rive CD une quantité Eu égale et parallèle à la vitesse u de l'eau du fleuve. Prenons arbitrairement sur EF un point V, qui représentera l'extrémité de la vitesse absolue et joignons Vu : cette droite représentera en grandeur et en direction la vitesse relative, v, que le nageur doit réaliser. Le problème a une infinité de solutions puisque le point V reste arbitraire sur la droite EF. Mais toutes ces solutions ne sont pas également avantageuses. Pour que le nageur ait le moins de peine possible à traverser la rivière, il convient que sa vitesse relative par rapport à l'eau soit la moindre possible. Cette solution s'obtiendra en abaissant du point u la perpendiculaire uV sur la droite EF. On trouvera ainsi le minimum admissible pour la vitesse v.

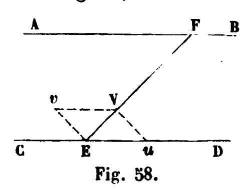
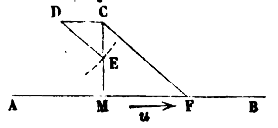


Fig. 58.

car la perpendiculaire uV est moindre que toute oblique partant du point u et aboutissant à la droite EF.

51. Un mobile M décrit uniformément, avec une vitesse u, la droite fixe AB.

Un second mobile C se meut avec une vitesse v dans le plan CAB; sa trajectoire est une droite non définie de position. On demande quelle est la direction à assigner à ce mobile pour qu'il rencontre le mobile M.



Fg. 59.

Si le point M était en repos, la trajectoire à assigner au mobile C serait la droite CM. Mais le point M est animé le long de AB d'un mouvement défini par la vitesse u. On ne change rien au mouvement relatif des deux points M et C, en leur imprimant à tous deux un mouvement d'entraînement commun. Choisissons pour ce mouvement d'entraînement additionnel, un mouvement égal et contraire au mouvement du point M sur la droite AB. Le point M sera ainsi ramené au repos. Quant au point C, il est animé de deux mouvements, l'un dans le sens CD, égal, parallèle et de sens contraire à la vitesse u, l'autre égal à la vitesse v, mais de direction encore inconnue; la résultante de ces deux mouvements donne la direction du mouvement relatif de C par rapport à M, et comme M est maintenant supposé fixe, cette direction est CM. Du point D comme centre, avec un rayon DE égal à v, décrivons un arc de cercle, qui coupe la droite CM en un point E; DE sera la direction à donner au point D, et la trajectoire qu'il doit décrire est en réalité une parallèle CF menée par le point C à cette droite DE.

Il est facile de vérifier que le point F sera le point de rencontre des deux mobiles. En effet, le temps que le mobile C met à aller du point C au point F est égal à $\frac{CF}{v}$; le temps que le mobile M met à aller du point M au point F est $\frac{MF}{u}$. Or, les triangles CDE, MFC, sont semblables et donnent la proportion :

$$\frac{MF}{CD} = \frac{CF}{DE},$$

ou bien, puisque CD et DE sont par construction proportionnels à u et v,

$$\frac{MF}{u} = \frac{CF}{v}.$$

Les deux temps sont donc égaux entre eux et, par suite, les mobiles, qui sont au même moment en M et C, seront aussi au même moment au point F.

Le problème peut n'avoir pas de solution si la vitesse v est moindre que la perpendiculaire abaissée du point D sur la droite CM. Car alors, l'arc de cercle décrit de D comme centre avec DE pour rayon ne rencontre pas CM. Il y aura deux solutions si v est compris entre la perpendiculaire abaissée du point D sur CM et la vitesse u, car cet arc de cercle coupera la droite CM en deux points situés au-dessous du point C, pourvu, toutefois, que l'angle DCM soit aigu. Il n'y a qu'une solution si $v > u$, ou si l'angle DCM est droit ou obtus; dans ce dernier cas, la condition $v > u$ est nécessaire pour que la solution existe. Autrement, le problème serait impossible, du moins dans le sens strict de l'énoncé.

C'est ce problème qu'un piéton C résout instinctivement quand il a à traverser une route parcourue suivant la droite AB par une file de voitures P, Q... Le point M qu'il doit se proposer d'atteindre est alors un point de l'intervalle libre entre deux voitures consécutives P, Q, et comme la vitesse des voitures est généralement plus grande que celle que le piéton peut se donner, il faut que l'angle DCM, supplément de l'angle AMC, soit un angle aigu ; il y a alors deux solutions, qui correspondent, l'une, CF, au triangle CDE, l'autre CF′ au triangle CDE′; celle qui donne lieu au moindre parcours, CF, est celle que le piéton doit adopter de préférence.

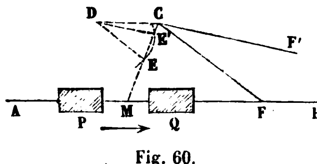


Fig. 60.

52. Ce problème peut se résoudre géométriquement d'une autre manière.

Il s'agit de trouver sur la droite AB un point F tel que le rapport

$\frac{FC}{FM}$ des distances de ce point aux deux points donnés C et M soit égal au rapport connu $\frac{v}{u}$.

Or on sait que le lieu des points dont les distances à deux points fixes C et M sont dans un rapport donné, est une circonférence de cercle, dont le centre est situé sur la droite CM qui joint ces deux points.

Supposons d'abord $v > u$; nous déterminerons sur la droite indéfinie CM, deux points I et K tels que l'on ait

$$\frac{IC}{IM} = \frac{KC}{KM} = \frac{v}{u}.$$

Fig. 61.

Puis nous décrirons sur IK comme diamètre une circonférence qui coupera la droite AB en deux points F et F', situés de différents côtés du point M. Chacun de ces points répond au problème géométrique que nous nous sommes proposé; mais le point F seul donne une solution directe du problème de mécanique que nous devions résoudre, car, pour adopter le point F', il faudrait, ou bien faire marcher le point mobile M sur sa trajectoire dans le sens MA, au lieu du sens MB, ou bien supposer que la rencontre des deux points a eu lieu au point F', avant l'époque du passage des deux mobiles l'un en C, l'autre en M.

Soit ensuite $v = u$. La circonférence de cercle se transforme dans ce cas particulier en une droite perpendiculaire au milieu H de la droite CM. Il n'y a qu'une solution dans ce cas, et elle n'est admissible dans le sens de l'énoncé que si l'angle CMB est aigu.

Fig. 62.

Enfin, soit $v < u$.

Nous résoudrons le problème en cherchant sur la droite CM deux points I' et K', l'un entre C et M, l'autre au delà de C par rapport à M, tels qu'on ait

$$\frac{I'M}{I'C} = \frac{K'M}{K'C} = \frac{v}{u}.$$

Puis nous décrirons sur $I'K'$ comme diamètre une circonférence qui coupera AB en deux points F_1 et F'_1, ou qui touchera AB, ou enfin qui ne rencontrera pas AB. Dans le premier cas, il y aura deux solutions; dans le second, il n'y en aura qu'une; dans le troisième, il n'y en aura aucune; et les deux solutions du premier cas ou la solution du second cas seront admissibles, pourvu que l'angle CMB soit aigu; car alors les points F_1, F'_1, seront situés à droite du point de départ M du mobile assujetti à décrire la droite AB, c'est-à-dire du côté vers lequel le mobile se dirige.

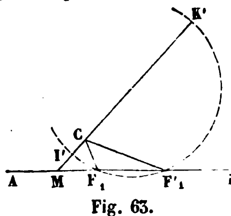


Fig. 63.

53. *Action du vent sur les girouettes, suivant qu'elles sont en repos ou en mouvement.*

Le vent oriente une girouette placée sur le toit d'une maison, suivant la direction même dans laquelle il souffle.

Supposons qu'on observe une girouette placée sur le mât d'un bateau. Soit M la projection horizontale du mât à un instant donné; soit MA, la direction et la grandeur de la vitesse u du vent; et MB, la direction et la grandeur de la vitesse v du bateau. Nous ne changerons pas le mouvement relatif du bateau par rapport au vent, en imaginant qu'on imprime au vent et au bateau un mouvement d'entraînement commun; choisissons ce mouvement de manière à rendre le bateau immobile; nous supposerons donc qu'on imprime au bateau et à l'air une vitesse MB' égale et contraire à la vitesse MB. Le bateau sera ramené au repos et la vitesse du vent sera la résultante MC de la vitesse MA qu'il possède réellement, et de la vitesse MB' qu'on a communiquée fictivement à tout le système. Tout se passe donc comme si, le bateau étant fixe, le vent avait une vitesse représentée en grandeur et en direction par la diagonale MC du parallélogramme ACB'M. La girouette du bateau s'orientera donc dans la direction de cette diagonale.

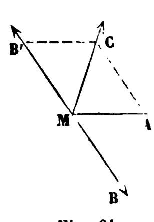


Fig. 64.

La direction de la girouette n'est pas altérée par le mouve-

ment du bateau lorsque le bateau et le vent ont des vitesses dirigées suivant la même droite.

Cette construction explique pourquoi un même vent agissant sur deux navires ou sur deux convois de chemin de fer qui marchent en sens contraire, donnent aux drapeaux des navires, ou aux fumées des machines, des directions toutes différentes.

Le navire A qui suit la route XY, avec une vitesse v, aura ses pavillons et sa fumée orientés suivant MN, diagonale du parallélogramme MVNv, construit sur le côté MV, égal et parallèle à la vitesse V du vent, et sur le côté Mv, égal, parallèle et contraire à la vitesse v du navire. Le navire A′, qui parcourt la route parallèle X′ Y′ avec une vitesse v', aura ses drapeaux et sa fumée orientés suivant la droite M′ N′, diagonale du parallélogramme M′v' N′ V, construit de même sur M′ V, vitesse du vent, et M′v', égale et contraire à la vitesse du navire.

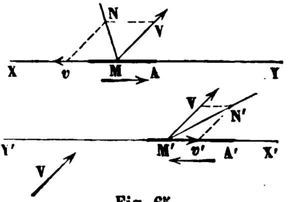


Fig. 65.

54. *Direction à donner à un parapluie pour s'abriter quand on marche.*

Un homme immobile doit tenir son parapluie vertical pour se garantir d'une pluie qui tombe verticalement. Mais s'il marche dans une certaine direction, il doit incliner son parapluie dans cette direction.

Soit Av la vitesse de la pluie suivant la verticale, et Au la vitesse de l'homme suivant l'horizontale. Imprimons à l'homme et à la pluie un mouvement commun, égal et contraire à la vitesse u de l'homme. L'homme devient immobile par cette hypothèse qui n'altère pas le mouvement relatif de la pluie par rapport à lui. Quant à la pluie, elle possède à la fois la vitesse Av, suivant la verticale, et une vitesse Au' égale et contraire à celle de la progression de l'individu. La résultante de ces deux vitesses est une vitesse V, vitesse relative de la pluie par rapport à l'homme. Tout se passe donc comme si la pluie

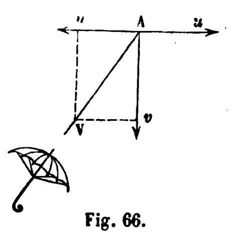


Fig. 66.

tombait suivant la droite AV, l'homme restant immobile, et par suite l'homme doit, pour s'en garantir le mieux possible, donner au manche de son parapluie une direction parallèle à AV.

L'observation des étoiles a fait découvrir un phénomène complétement identique. Chaque étoile nous envoie des rayons lumineux qui se propagent avec une vitesse de 308 000 kilomètres par seconde; l'observateur qui, placé sur la terre, pointe sa lunette sur une étoile, reçoit le rayon lumineux dans sa lunette comme tout à l'heure notre homme recevait les gouttes d'eau sur son parapluie. Si la terre était immobile, la lunette aurait la direction même du rayon lumineux. Mais la terre n'est pas immobile; elle décrit autour du soleil, avec une vitesse moyenne de 30 kilomètres à la seconde, une ellipse dont elle achève le tour en une année. La direction de la lunette qui reçoit les rayons émanés de l'étoile, est donc la résultante de la vitesse de la lumière et d'une vitesse égale et contraire à celle de la terre sur son orbite; et par suite la direction dans laquelle l'étoile paraît, fait dans le sens du mouvement de la terre un petit angle avec la direction réelle dans laquelle l'étoile se trouve. De là résulte que toutes les étoiles semblent décrire annuellement une petite courbe fermée à la surface du ciel. Ce mouvement apparent, dû au mouvement propre de la terre, constitue ce qu'on appelle l'*aberration de la lumière*.

55. *Mouvement annuel apparent du soleil.*

La terre T, que nous supposerons ici réduite à un seul point matériel, parcourt en un an une ellipse AB, dont le soleil S occupe l'un des foyers. La vitesse v de la terre est dirigée à un instant quelconque suivant la tangente Tv à la trajectoire, et elle a à chaque instant une grandeur que nous supposerons connue.

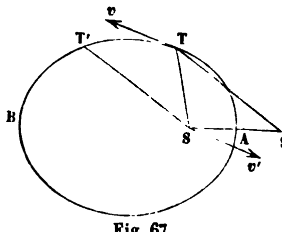


Fig. 67.

On propose de chercher le mouvement relatif du soleil par rapport à la terre, ou le mouvement apparent du soleil pour nous, qui, habitant la terre, la regardons comme fixe dans l'espace.

Ce problème se résoudra de même en imprimant à chaque in-
ux deux points T et S, un mouvement d'entraînement

commun, égal et contraire à la vitesse v que possède la terre à cet instant. Il en résultera que la terre T deviendra immobile, et que le soleil S aura à chaque instant une vitesse v' égale et parallèle à celle que possède réellement la terre au même instant, mais dirigée en sens contraire. En définitive, le soleil S semblera décrire autour de la terre une ellipse égale à l'ellipse AB, dont la terre occupera un des foyers, et avec une vitesse égale et contraire à chaque instant à celle de la terre sur son orbite. Pour construire la trajectoire apparente du soleil, prenons différentes positions, T, T', T'',.... de la terre sur sa trajectoire réelle ; joignons-les au point S ; puis par un même point T_1 de l'espace, menons des droites T_1S_1, T_1S_1', $T_1S''_1$,.... respectivement parallèles et égales à TS, T'S, T''S,.... Le lieu des points S_1, S_1', S_1'', ainsi obtenus sera la trajectoire cherchée. L'observateur, qui passe en

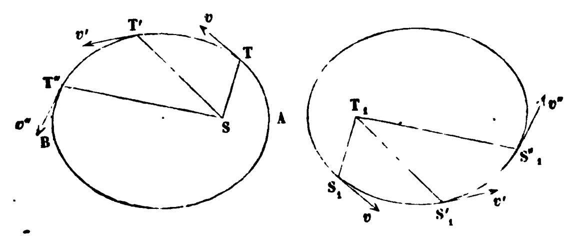


Fig. 68.

réalité du point T au point T', sur sa trajectoire réelle, et qui se croit en repos en un point T_1 quelconque, verra le soleil parcourir l'arc $S_1S'_1$ de sa trajectoire apparente pendant le même intervalle de temps.

De même, le mouvement de rotation de la terre qui s'opère d'occident en orient autour de la ligne des pôles, produit pour les hommes l'apparence d'un mouvement de rotation commun à toute la voûte céleste, et qui s'opère en sens contraire autour de la même droite.

56. *Mouvement relatif de deux planètes.*

Nous supposerons, pour simplifier le problème, que les planètes décrivent autour du soleil, d'un mouvement uniforme, et dans le même sens, des cercles concentriques et situés dans un

même plan, et que le soleil occupe le centre commun de ces cercles.

Les vitesses des deux planètes sur leurs trajectoires respectives sont liées entre elles par la troisième loi de Kepler : « Les carrés des temps des révolutions sont comme les cubes des grands axes, » ou ici, comme les cubes des rayons.

Soit donc S le soleil, supposé fixe, T une planète, la terre par exemple, à la distance $ST = a$, du soleil ; M une autre planète, à la distance $SM = a'$.

Appelons t et t' les temps que les planètes T et M mettent à faire le tour entier du cercle qui leur sert de trajectoire. La vitesse de la planète T sera $\frac{2\pi a}{t}$, et la vitesse de M, $\frac{2\pi a'}{t'}$. Or, en vertu de la loi de Kepler qui vient d'être citée, nous avons la proportion :

Fig. 69.

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

Donc

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{a^3}{a'^3}},$$

et par suite

$$\frac{\left(\frac{2\pi a}{t}\right)}{\left(\frac{2\pi a'}{t'}\right)} = \frac{a}{a'} \times \frac{t'}{t} = \frac{a}{a'} \times \sqrt{\frac{a'^3}{a^3}} = \sqrt{\frac{a'}{a}}.$$

Les vitesses sont donc entre elles en raison inverse des racines carrées des rayons des orbites.

Supposons que les deux planètes partent ensemble d'une *conionction*, c'est-à-dire des positions T et M, situées sur une même

droite passant par le soleil, et du même côté du soleil sur cette droite.

Au bout de la durée $\frac{t}{2}$ d'une demi-révolution, la terre parvient en T_1, au point opposé de son orbite ; la planète M aura, pendant ce temps, décrit un certain arc, MM_1, sur sa trajectoire ; les arcs MM_1, TT_1, étant décrits dans le même temps et chacun avec une vitesse uniforme, sont entre eux comme les vitesses des mobiles, c'est-à-dire comme $\sqrt{a}$ est à $\sqrt{a'}$; on aura donc :

$$\frac{\text{arc } MM_1}{\pi a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}},$$

équation où tout est connu, sauf l'arc MM_1. On en déduira cet arc.

La terre revient ensuite, dans un second intervalle de temps égal à $\frac{t}{2}$, au point T où elle était d'abord ; pendant ce temps, la planète passe de M_1 en M_2, en décrivant un arc M_1M_2, égal à MM_1.

De même la planète décrit l'arc $M_2M_3 = M_1M_2$, pendant que la

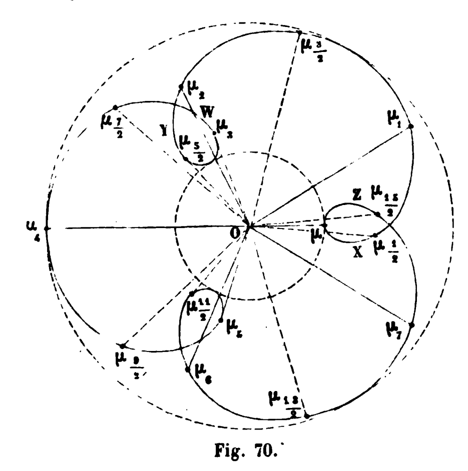


Fig. 70.

terre retourne de T en T_1, et l'arc M_3M_4 pendant que la terre va de T_1 en T.

Supposons, pour simplifier les constructions, que M_4 soit le point opposé au point M sur l'orbite de la planète.

La terre et la planète, qui se trouvaient en *conjonction* aux points T et M, se trouveront en *opposition* aux points M_4 et T. Puis au bout de quatre autres demi-révolutions de la terre, la planète se retrouvera à son point de départ M et la terre à son point de départ T.

Pour construire la trajectoire relative de M par rapport à T, joignons par des droites les positions simultanées des deux planètes, TM, T_1M_1, TM_2, T_1M_3, TM_4, T_1M_5, TM_6, T_1M_7, TM; puis, par un point quelconque O, qui représentera la position fixe attribuée à la terre, (fig. 70) menons des droites, $O\mu$, $O\mu_1$, $O\mu_2$, $O\mu_3$, $O\mu_4$, $O\mu_5$, $O\mu_6$, $O\mu_7$, $O\mu$, égales et parallèles à ces lignes de jonction. Le lieu des points μ, μ_1,... μ_7, sera la trajectoire apparente. On en aura d'autres points en fractionnant les arcs décrits par les deux planètes.

Telle est la courbe sinueuse que la planète M semblera décrire par rapport à la terre. Les boucles correspondent aux *rétrogradations* apparentes des planètes supérieures au moment des conjonctions. La planète M, que l'on voit marcher dans le sens direct tant qu'elle parcourt les arcs XY de sa trajectoire apparente, paraît se déplacer à la surface du ciel dans le sens rétrograde quand elle parcourt l'un des arcs ZX, ou YW. Le mouvement d'entraînement de la terre donne une explication très-simple de ce phénomène.

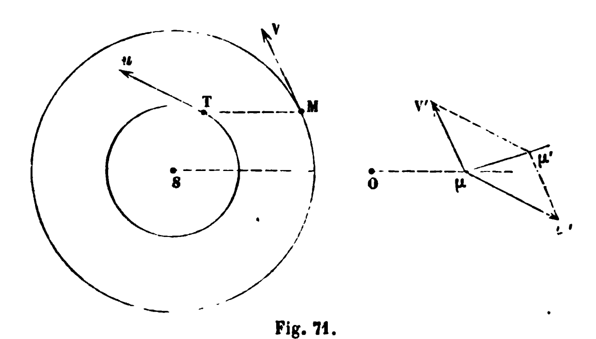


Fig. 71.

57. Il est facile de construire la tangente en un point donné μ, de la trajectoire relative. En effet, cette tangente est la direction de

la vitesse relative de la planète M par rapport à la terre, laquelle est la résultante de la vitesse absolue de M, et d'une vitesse égale et contraire à la vitesse absolue de T.

Soient à un même instant T et M deux positions des planètes; par le point O, menons $O\mu$, égal et parallèle à TM ; μ sera le lieu apparent de la planète M par rapport à la planète T supposée immobile au point O. Menons aux points T et M les tangentes, Tu, MV, aux trajectoires absolues, et prenons sur ces tangentes, dans le sens du mouvement, des longueurs Tu, MV, égales ou proportionnelles aux vitesses des deux mobiles. Par le point μ, menons $\mu u'$, égal, parallèle et de sens contraire à Tu ; puis $\mu V'$, égal, parallèle à MV, mais de même sens que MV. Construisons le parallélogramme $\mu u' \mu' V'$; la diagonale $\mu\mu'$ de ce parallélogramme sera la direction de la vitesse relative de M par rapport à T ; ce sera donc la tangente à la courbe apparente décrite par la planète M.

APPENDICE AU CHAPITRE III

MÉTHODE DE ROBERVAL

POUR LE TRACÉ DES TANGENTES AUX COURBES.

58. Lorsqu'un point mobile engendre une courbe, la vitesse de ce point est à chaque instant dirigée suivant la tangente à cette courbe. Décomposons à un certain moment le mouvement du point en deux mouvements simultanés : la vitesse absolue du point sera la résultante des vitesses correspondantes à chacun de ces deux mouvements. Si donc on sait trouver les vitesses de ces deux mouvements, on pourra construire la tangente à la courbe par la règle du parallélogramme des vitesses.

Quelquefois, on peut déterminer facilement l'une des deux vitesses composantes en grandeur et en direction et, la seconde, en direction seulement, ce qui ne suffit pas pour construire le parallélogramme dont la tangente cherchée est la diagonale. Dans ce cas, on peut souvent achever la solution en décomposant le mouvement du point d'une autre manière, dans laquelle les deux vitesses composantes soient encore connues en direction et l'une d'elle en grandeur. Ces diverses méthodes sont connues en géométrie sous le nom de *Méthode de Roberval.*

Cherchons, par exemple, à mener une tangente en un point donné de la *conchoïde*. Cette courbe EF s'obtient en menant par un même point O des transversales OD, qui rencontrent une droite fixe AB, et en prenant sur ces transversales une longueur constante CD à partir de la rencontre avec la droite AB.

Soit D le point auquel on demande de mener une tangente à la courbe.

Considérons une position infiniment voisine OD′ de la transversale, ce qui nous donne un point de la courbe D′ infiniment voisin du point D. Soit C′ le point de rencontre de la transversale avec la droite AB.

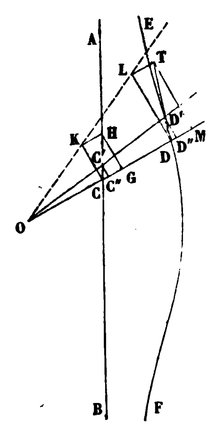


Fig. 72.

Projetons les points C′ et D′ sur OD; nous décomposons ainsi chacun des éléments CC′, DD′, décrits par les points mobiles C et D, en deux éléments CC″ et C″C′, DD″ et D″D′, et si nous divisons tous ces éléments par le temps infiniment petit θ que la droite OD met à passer à la position OD′, nous aurons les vitesses des points C et D, et les composantes de ces vitesses projetées sur OD et sur une perpendiculaire à OD.

Les longueurs CD et C′D′ sont égales par hypothèse; d'ailleurs, la longueur C″D″, projection de C′D′ sur une direction qui fait avec OD′ un angle infiniment petit, est égale à C′D′, à moins d'un infiniment petit du second ordre. Par suite C″D″ = CD, et retranchant de part et d'autre la partie commune C″D, il vient CC″ = DD″. Si l'on divise par θ, on voit que les vitesses des points C et D, projetées sur OD, sont égales.

Les vitesses de ces points perpendiculairement à OD sont égales à $\frac{C'C''}{\theta}$ et $\frac{D'D''}{\theta}$, et, par suite, elles sont entre elles comme C′C″ et D′D″, ou comme les distances OC′, OD′, qui deviennent à la limite égales à OC et OD.

Prenons donc, à partir du point C dans la direction CA, une longueur arbitraire CH, qui représentera la vitesse du point C le long de la droite BA. Puis décomposons cette vitesse CH en deux vitesses, l'une CG suivant OD, l'autre CK perpendiculaire à la première. Nous venons de voir que la vitesse absolue du point D a une composante suivant OD égale à la composante de la vitesse du point C, c'est-à-dire égale à CG. On prendra donc DM = CG. La composante de la vitesse du point D perpendiculairement à OD est à la composante CK comme OD est à OC. Élevons

au point D, DL perpendiculaire à OD, puis joignons OK et prolongeons cette droite jusqu'au point L; nous aurons la proportion :

$$\frac{DL}{CK}=\frac{OD}{OC}.$$

Donc DL est la composante de la vitesse du point D normale à OD.

Achevant le rectangle LDMT, on en mènera la diagonale DT, qui sera la tangente cherchée.

59. *Second exemple.* Mener une tangente au point M à la courbe lieu des points tels que le rapport $\frac{MA}{MB}$ des distances de ces points à deux points fixes A et B soit égal à un nombre donné K.

Soit M′ un point du lieu infiniment voisin du point M. Abaissons du point M′ les perpendiculaires M′M″, M′M‴ sur les droites MA, MB. Puis considérons les rapports $\frac{MM'}{\theta}$, $\frac{MM''}{\theta}$, $\frac{M''M'}{\theta}$, $\frac{MM'''}{\theta}$, $\frac{M'''M'}{\theta}$, des longueurs infiniment petites MM′,... M‴M′, à l'intervalle de temps infiniment petit θ que le point mobile met à aller du point M au point M′. Le premier rapport est la vitesse du point. Les deux suivants $\frac{MM''}{\theta}$ et $\frac{M''M'}{\theta}$ sont les composantes de cette vitesse suivant MA et une perpendiculaire à MA. De même, $\frac{MM'''}{\theta}$ et $\frac{M'''M'}{\theta}$ sont les composantes de la vitesse absolue du point suivant MB et une perpendiculaire à MB. Or, nous pouvons déterminer le rapport de MM″ à MM‴. En effet, AM″ diffère de AM′ d'un infiniment petit du second ordre, de même BM‴ diffère de BM′ d'un infiniment petit du second ordre; donc, MM″ et MM‴ sont, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, les différences entre AM et AM′, entre BM et BM′. Mais nous avons à la fois :

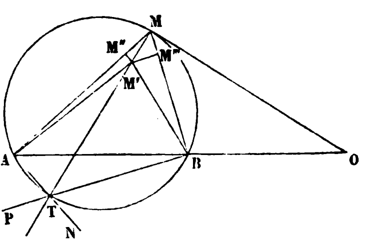


Fig. 73.

$$AM = BM \times K$$

et

$$AM' = BM' \times K,$$

puisque M et M′ sont deux points du lieu. Par suite

$$AM - AM' = (BM - BM') \times K,$$

ou bien

$$MM'' = MM''' \times K.$$

Les longueurs infiniment petites MM'', MM''' sont entre elles dans le même rapport que les distances MA, MB; il en est donc de même des vitesses $\frac{MM''}{\theta}$ et $\frac{MM'''}{\theta}$, c'est-à-dire des vitesses du point mobile estimées suivant les directions MA et MB.

Prenons la longueur MA pour représenter la vitesse du point M projetée sur la direction MA. Nous obtiendrons la vitesse absolue de M en composant MA avec une vitesse perpendiculaire à sa direction, et, par suite, la vitesse absolue sera représentée à la même échelle par une droite partant du point M et aboutissant en un point de la droite AN, élevée au point A perpendiculairement à AM. Par la même raison, la vitesse absolue est représentée par une droite partant du point M et aboutissant en un point de la droite BP, perpendiculaire à BM menée par le point B. Donc la droite qui représente cette vitesse aboutit au point T, où se coupent les droites AN et BP, et MT est la tangente cherchée.

Ici, nous avons obtenu la tangente en décomposant le mouvement de deux manières, et nous n'avons pas eu à déterminer en grandeur les vitesses normales aux rayons MA, MB.

Il est facile de reconnaître d'après cette construction que le lieu cherché est un cercle dont le centre est situé sur la direction AB. Au point M élevons une perpendiculaire sur MT. Ce sera la normale à la courbe lieu des points M, et nous allons prouver qu'elle coupe la direction AB en un point fixe O. Les angles MAT, TBM étant droits par construction, les quatre points M, A, T, B sont sur une même circonférence et MT est un diamètre de cette circonférence; donc MO, perpendiculaire au diamètre MT, est tangente à cette circonférence au point M. L'angle OMB, formé par une corde MB et une tangente MO, a pour mesure la moitié de l'arc MB sous-tendu par la corde, il est donc égal à l'angle inscrit MAB, qui comprend le même arc entre ses côtés. Les deux triangles MAO, MBO, qui ont un angle commun en O, et les angles MAO, BMO égaux entre eux, sont semblables et donnent la suite de rapports égaux :

$$\frac{BO}{MO} = \frac{MB}{AM} = \frac{MO}{AO}.$$

Donc

$$BO = MO \times \frac{MB}{AM} = \frac{MO}{K},$$

$$AO = MO \times \frac{AM}{MB} = MO \times K.$$

et par suite

$$\frac{AO}{BO} = K^2.$$

Les distances du point O aux points A et B sont donc entre elles dans le rapport connu K^2, et, par suite, la position du point O est fixe sur la direction AB.

Les mêmes relations donnent $\overline{MO}^2 = BO \times AO$, et comme BO et OA sont constants, MO est aussi constant. Le lieu du point M est donc une circonférence décrite du point O comme centre avec la grandeur MO pour rayon.

CHAPITRE IV

DU MOUVEMENT CURVILIGNE

ET DE L'ACCÉLÉRATION TOTALE.

60. Nous avons déjà défini, dans le chapitre Ier, ce qu'on entend par *accélération* lorsque le mouvement est rectiligne, et par *accélération tangentielle* lorsque le mouvement ne s'effectue pas suivant une ligne droite. Nous allons reprendre l'examen des questions relatives à l'accélération, et nous pourrons en étendre la définition au moyen de la théorie du mouvement relatif.

Considérons d'abord un mouvement rectiligne. Soit AB la ligne

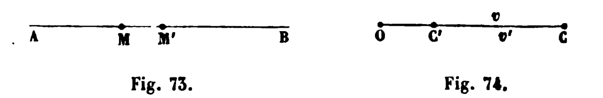


Fig. 73. Fig. 74.

droite qui sert de trajectoire à un mobile, M, dont la vitesse est variable. Les vitesses du mobile en deux positions successives très-rapprochées, M, M′, prises sur la trajectoire, seront généralement différentes ; appelons v la vitesse au point M, et v' la vitesse au point M′ ; soit enfin θ le temps très-court qui s'est écoulé entre le passage du mobile en M et son passage en M′.

Imaginons qu'un mobile fictif parte du point M en même temps que le mobile réel, et avec la même vitesse v, et qu'il se meuve dans le même sens AB que le mobile réel, mais *d'un mouvement uniforme ;* puis cherchons quelle est au bout du temps θ la vitesse relative du mobile réel par rapport au mobile fictif.

Pour cela, nous appliquerons le théorème du § 46 : la vitesse

relative à un moment donné est la *résultante* de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

Au bout du temps θ, la *vitesse absolue* du mobile réel est v'. Menons donc une droite OC égale à v', et parallèle à la direction de la vitesse, c'est-à-dire parallèle à la trajectoire AB.

La *vitesse d'entraînement* est la vitesse du mobile fictif ; elle est égale à v, et elle est dirigée suivant la droite AB ; mais nous devons la prendre en sens contraire, ce qui revient à porter sur CO, de C vers O, une quantité $CC' = v$; la différence $OC' = v' - v$ sera la *résultante* des deux vitesses v' et v ; c'est donc la vitesse relative cherchée.

Les deux vitesses v et v' diffèrent infiniment peu l'une de l'autre, et la quantité infiniment petite $v' - v$ est ce qu'on appelle la *vitesse acquise élémentaire;* si on la divise par le temps θ, le rapport $\frac{v'-v}{\theta}$ exprime la quantité dont s'accroîtrait la vitesse du mobile pendant l'unité de temps, si pendant toute cette durée la vitesse recevait en temps égaux des accroissements élémentaires égaux.

Ce rapport $\frac{v'-v}{\theta}$ est, comme nous l'avons vu, la *vitesse de la vitesse*, ou l'*accélération* du mouvement rectiligne.

Représentons-le par j ; nous aurons $v' - v = j\theta$; nous pourrons dire en conséquence que *la vitesse du mobile s'accroît pendant un temps très-court* θ *d'une quantité égale au produit de l'accélération* j *par cet intervalle de temps* θ, ou, en employant la notion du mouvement relatif, que *le produit* $j\theta$ *est la vitesse apparente qu'aurait le mobile au bout du temps* θ, *par rapport à un observateur qui pendant tout le temps* θ *conserverait la vitesse* v *qu'avait le mobile au commencement de ce temps.*

La considération du mouvement relatif conduit ainsi à décomposer le mouvement du mobile, entre deux positions très-voisines M, M', occupées successivement par lui sur sa trajectoire, en deux mouvements simples : le premier est un mouvement *uniforme*, dont la *vitesse constante* est v ; le second est un mouvement *uniformément varié*, qui part du repos et dont l'*accélération constante* est j. Le mouvement effectif du mobile sera la *résultante* de ces deux mouvements ; l'espace total décrit sera la

somme des deux espaces respectivement décrits en vertu de chaque mouvement considéré seul, puisqu'ils sont tous deux dirigés suivant la même droite.

Or, en vertu du premier mouvement pris isolément, le mobile parcourrait dans le temps θ une longueur $Mm = v\theta$; en vertu du second mouvement, le mobile partant du repos, parcourrait une longueur égale à $\frac{1}{2} j\theta^2$ (§ 27).

M m M'

Fig. 74.

Ces deux longueurs, qui sont dirigées suivant la même droite, s'additionnent pour donner l'espace réellement décrit. Donc enfin

$$MM' = v\theta + \tfrac{1}{2} j\theta^2.$$

Mais $Mm = v\theta$. Donc

$$mM' = \tfrac{1}{2} j\theta^2.$$

De là résulte une nouvelle méthode pour trouver l'accélération j dans le mouvement rectiligne, en considérant les espaces parcourus.

On a en effet

$$j = \frac{2mM'}{\theta^2}.$$

Pour trouver l'accélération j à un instant donné, on prendra donc, au bout d'un temps θ très-court après cet instant, la distance mM' entre la position M' du mobile, et la position m qu'il aurait, si pendant tout le temps θ il avait conservé sa vitesse, et on divisera le double de cette distance par θ^2. Le quotient sera la mesure de l'accélération cherchée.

Les formules que nous venons d'obtenir sont générales pourvu que l'on donne aux vitesses v, v', à l'accélération j, enfin aux espaces décrits sur la trajectoire, les *signes* algébriques qui correspondent au *sens* de ces diverses quantités.

MOUVEMENT CURVILIGNE.

61. Nous pouvons appliquer les mêmes principes au mouvement curviligne.

Soit AB la trajectoire ;

M et M′, deux positions successives du mobile, l'une M au commencement, l'autre M′ à la fin d'un intervalle de temps θ très-court.

Menons en M et M′ deux tangentes à la trajectoire, et sur ces tangentes prenons dans le sens du mouvement deux longueurs Mv, $M'v'$ égales aux vitesses du mobile à son passage en M et en M′.

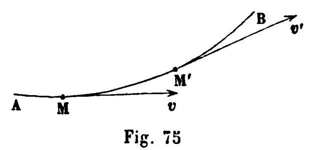


Fig. 75

Puis cherchons la *vitesse relative* du mobile parvenu en M′ par rapport à un mobile fictit qui serait entraîné le long de Mv, avec la vitesse v que possède le mobile à son passage en M.

Pour cela, menons par un même point O de l'espace deux droites OC, OC′, égales et parallèles à Mv, $M'v'$. Joignons CC′. Cette droite représentera la vitesse relative cherchée.

En effet, achevons le parallélogramme OCC′D; dans ce parallélogramme, la diagonale OC′ est la *résultante* des deux côtés OC, OD; donc la vitesse *absolue* v' du mobile au point M′ est la *résultante* de la vitesse OD, ou CC′, et de la *vitesse d'entraînement*, $OC = v$, du système de comparaison. Donc CC′ est la vitesse relative en grandeur et en direction.

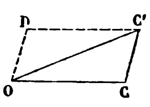


Fig. 76.

Cette vitesse relative est encore ce qu'on appelle la *vitesse acquise élémentaire*. C'est la vitesse infiniment petite qui se *compose* avec la vitesse v pour produire au bout du temps θ la vitesse v'.

L'*accélération totale* j est le quotient $\frac{CC'}{\theta}$ de la vitesse acquise élémentaire par le temps θ du trajet du mobile de M en M′. La direction CC′, ou OD, est la direction de l'accélération j. Dans le mouvement curviligne, l'accélération totale a une direction différente de la vitesse; elle a la même direction que la vitesse dans le mouvement rectiligne.

La *vitesse acquise élémentaire* s'obtient en multipliant par θ l'accélération totale j.

L'application de la théorie du mouvement relatif conduit donc encore à décomposer le mouvement réel du mobile pendant un temps

très-court θ, en *deux mouvements rectilignes simultanés*. Le premier, uniforme, s'effectue le long de la tangente à la trajectoire au point M avec la vitesse constante v que le mobile possède à son passage en M. Le mobile parcourt en vertu de ce mouvement l'espace $Mm = v\theta$.

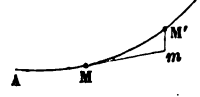


Fig. 77.

Le second, uniformément varié, fait parcourir au mobile l'espace rectiligne mM', avec une accélération constante égale à j ; ce second mouvement part du repos, et par suite, au bout du temps θ, l'espace décrit mM' est égal à $\frac{1}{2} j\theta^2$.

L'*accélération totale* j se déterminera donc *en direction*, par la recherche de la position que prend la droite mM' à la limite, lorsque θ décroît indéfiniment ; *en grandeur*, en divisant le double de la distance mM' par θ^2,

$$j = \frac{2mM'}{\theta^2},$$

et en prenant la limite de ce rapport.

ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME.

62. Comme exemple de cette détermination, proposons-nous de trouver l'accélération totale dans le mouvement uniforme d'un mobile qui parcourt, avec une vitesse constante V la circonférence d'un cercle de rayon R.

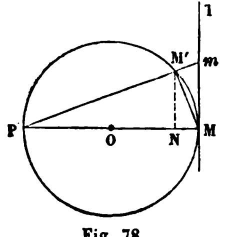


Fig. 78.

Soit M la position occupée par le mobile à un certain instant, et M' la position qu'il prend au bout du temps très-court θ. Nous aurons arc $MM' = V\theta$, puisque le mouvement est uniforme.

Par le point M, menons une tangente MT au cercle ; et prenons sur cette droite une quantité $Mm = V\theta =$ arc MM'. A la limite, la droite mM' sera la direction de l'accélération cherchée, et $\frac{2mM'}{\theta^2}$ en sera la grandeur j.

L'arc infiniment petit MM' peut être confondu avec l'ordonnée M'N abaissée du point M' perpendiculairement sur le rayon OM, et par suite la figure infiniment petite MNM'm est un rectangle dans lequel les côtés opposés mM', MN, sont égaux et parallèles.

Donc *à la limite* la direction de l'accélération j coïncide avec le rayon MO ; en d'autres termes, l'accélération est *centripète,* c'est-à-dire dirigée du point M vers le centre O.

Quant à sa grandeur j, elle est donnée par l'équation

$$j = \frac{2 \times mM'}{\theta^2} = \frac{2 \times MN}{\theta^2}.$$

Prolongeons jusqu'en P le rayon MO, et joignons M'P, M'M; nous aurons dans le triangle rectangle PM' M

$$\overline{MM'}^2 = MN \times MP.$$

Mais la corde MM', qui est infiniment petite, se confond avec l'arc MM', et par suite est égale à $v\theta$; MP est égal au diamètre 2R du cercle. Donc

$$V^2\theta^2 = MN \times 2R.$$

On en déduit

$$\frac{2MN}{\theta^2} = j = \frac{V^2}{R}.$$

Donc enfin, lorsqu'un mobile parcourt uniformément un cercle de rayon R, avec une vitesse V, l'*accélération totale* du point est dirigée constamment vers le centre du cercle, et est égale au carré de la vitesse divisé par le rayon.

On remarquera par cet exemple combien l'*accélération totale* peut différer de l'*accélération tangentielle* étudiée dans le chapitre Ier ; ici la vitesse étant constante, l'accélération tangentielle, *vitesse de la vitesse,* est constamment nulle, tandis que l'accélération totale est constante et égale à $\frac{V^2}{R}$.

Remarquons encore que $\frac{V^2}{R}$ est, abstraction faite du signe, l'*accélération* que nous avons trouvée (§ 41) pour le mouvement rectiligne de la projection du mobile sur le diamètre fixe MP, lorsque le mobile atteint l'extrémité M de ce diamètre.

ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT CIRCULAIRE VARIÉ.

63. Supposons encore que le mobile décrive la circonférence de rayon OM, mais que sa vitesse, au lieu d'être constante, soit variable.

Soit v la vitesse du mobile à son passage en M; prenons sur la tangente MT une longueur $Mm = v\theta$. Soit M' la position occupée par le mobile au bout du temps θ; nous n'aurons plus comme tout à l'heure arc $MM' = Mm$, parce que le mobile ne conserve pas la vitesse v pendant tout le temps de son trajet de M en M'.

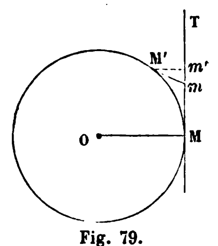


Fig. 79.

La position limite de la droite mM' représente en direction l'accélération totale, et la grandeur de cette accélération est donnée par l'équation

$$j = \frac{2mM'}{\theta^2}.$$

Projetons le point M' en m' sur la tangente MT. Nous pouvons considérer le chemin mM' comme la résultante géométrique des deux chemins mm', $m'M'$, dont l'un est dirigé suivant la tangente et dont l'autre est perpendiculaire au premier et parallèle à la normale à la trajectoire au point M. Nous sommes conduits par là à regarder l'accélération totale j, égale à $\frac{2mM'}{\theta^2}$, comme la résultante de deux accélérations, l'une *tangentielle*, qui sera égale à $\frac{2\,mm'}{\theta^2}$, et l'autre *normale* ou *centripète* qui sera égale à $\frac{2\,M'm'}{\theta^2}$, tous ces rapports étant pris à la limite quand θ décroît indéfiniment.

Il reste donc à évaluer la limite vers laquelle tendent ces rapports. Observons que la vitesse du mobile, quand il se transporte du point M au point M', passe de la valeur v au point M, à une valeur v' au point M'. La *vitesse moyenne* du parcours infiniment

petit MM′ diffère infiniment peu de $\frac{v+v'}{2}$ et, par suite, l'arc MM′ est égal à $\frac{v+v'}{2} \times \theta$.

Cet arc infiniment petit se confond avec sa projection M*m*′ sur la tangente MT ; donc

$$Mm' = \frac{v+v'}{2} \times \theta.$$

Mais $Mm = v\theta$, par construction. Donc

$$mm' = \frac{v+v'}{2} \times \theta - v\theta = \frac{v'-v}{2} \times \theta.$$

L'*accélération tangentielle* j' s'obtient, comme nous venons de le voir, en prenant le rapport $\frac{2\,mm'}{\theta^2}$, ce qui nous donne

$$j = \frac{2 \times \left(\frac{v'-v}{2} \times \theta\right)}{\theta^2} = \frac{v'-v}{\theta},$$

résultat conforme à la définition que nous avions donnée de l'accélération tangentielle, considérée comme *vitesse de la vitesse.*

L'*accélération normale* j'', nommée aussi *centripète*, parce qu'elle a la direction $m'M'$, et qu'à la limite cette direction se confond avec la droite MO, menée du point M au centre O du cercle, est donnée par la formule

$$j'' = \frac{2\,m'M'}{\theta^2}.$$

Or, nous avons vu tout à l'heure que $(\text{arc } MM')^2 = m'M' \times 2R$. Donc

$$m'M' = \frac{(\text{arc } MM')^2}{2R},$$

et par suite

$$j'' = \frac{(\text{arc } MM')^2}{R\theta^2}.$$

Mais

$$\text{arc MM}' = \left(\frac{v+v'}{2}\right)\theta.$$

Donc enfin

$$j'' = \frac{\left(\frac{v+v'}{2}\right)^2 \times \theta^2}{R\theta^2} = \frac{\left(\frac{v+v'}{2}\right)^2}{R};$$

à la limite, quand θ décroît indéfiniment, $\frac{v+v'}{2}$ devient égal à v, et l'on a

$$j'' = \frac{v^2}{R}.$$

L'*accelération normale* ou *centripète* est donc, comme dans le mouvement uniforme, égale au carré de la vitesse divisé par le rayon du cercle.

EXTENSION AU MOUVEMENT CURVILIGNE QUELCONQUE.

64. Soit AB une courbe tracée dans l'espace. Considérons un arc très-petit MN de cette courbe : nous pouvons prendre sur cet arc trois points M, P, N, non situés en ligne droite et par ces trois points faire passer un plan qui contiendra l'arc MN entier, pourvu que la longueur MN soit assez petite; ce plan est le plan de la courbe dans la région MN; on lui donne le nom de *plan osculateur*.

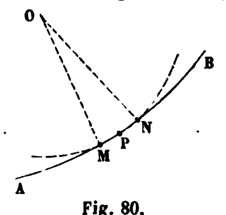


Fig. 80.

Par les trois points M, P, N, qui ne sont pas en ligne droite, on peut faire passer une circonférence de cercle, qui se confondra avec la courbe dans toute l'étendue de l'arc MN. Cette circonférence est appelée le *cercle osculateur*.

Ces définitions supposent que l'arc MN est infiniment petit; le plan osculateur et le cercle osculateur sont le plan limite et le cercle limite que l'on obtient en un point M donné quand l'arc MN décroît indéfiniment.

La *normale principale* à une courbe en un point M est la normale élevée à la courbe au point M dans son plan osculateur. Elle [illegible] par le centre O du cercle osculateur.

Le rayon OM du cercle osculateur reçoit le nom de *rayon de courbure*.

Menons deux tangentes à la courbe, l'une au point M, l'autre au point N. L'angle de ces deux tangentes, qu'on appelle *angle de contingence*, est la mesure de la *courbure* totale de l'arc MN. Cet angle est le même pour la courbe et pour le cercle osculateur. Or, dans le cercle osculateur, il est égal à l'angle au centre NOM, et si on évalue cet angle, non en degrés, mais en parties du rayon, suivant l'usage de l'analyse, on pourra poser

$$\text{arc MN} = \text{OM} \times \text{angle MON}.$$

D'où l'on déduit

$$\text{OM, ou le rayon de courbure} = \frac{\text{arc MN}}{\text{angle MON}}.$$

Le rayon de courbure est donc égal à la longueur de l'arc MN divisée par l'angle de contingence, ou plutôt est égal à la limite de ce rapport.

65. Ces définitions posées, il est facile d'étendre à un mouvement curviligne quelconque le théorème que nous venons d'établir pour le mouvement circulaire varié.

Soit AB la trajectoire ;

M, la position du mobile à un certain instant ;

v, sa vitesse à cet instant ;

M′, la position du mobile au bout du temps θ ;

v', la vitesse du mobile au bout de ce temps.

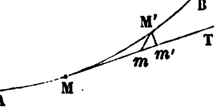


Fig. 81.

Menons la tangente MT et prenons sur cette tangente, à partir du point M, une longueur $Mm = v\theta$.

Joignons mM′ et projetons M′ en m' sur la tangente MT.

L'*accélération totale* sera égale à

$$\frac{2 \times mM'}{\theta^2},$$

et elle se décompose en deux :

l'*accélération tangentielle*, $\dfrac{2\,mm'}{\theta^2} = j'$,

et l'*accélération normale*, $\dfrac{2\,m'M'}{\theta^2} = j''$.

Or Mm', à la limite, se confond avec MM' qui est égal à $\frac{v+v'}{2}\times\theta$, et par suite $mm' = \frac{v'-v}{2}\times\theta$. Donc

$$j' = \frac{2\times\left(\frac{v'-v}{2}\right)\times\theta}{\theta^2} = \frac{v'-v}{\theta},$$

ce qui justifie notre définition générale de l'accélération tangentielle.

Pour évaluer j'', considérons le cercle osculateur de la courbe au point M, et soit ρ le rayon de ce cercle, ou le rayon de courbure de la trajectoire en ce point. Nous aurons

$$M'm' \times 2\rho = (\text{arc } MM')^2,$$

et

$$j'' = \frac{2M'm'}{\theta^2} = \frac{2\times(\text{arc } MM')^2}{2\rho\theta^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Nous retrouvons les mêmes expressions que nous avons posées pour le mouvement circulaire, grâce à l'introduction du rayon de courbure. Remarquons que la direction limite de j'' est une normale à la courbe menée dans le plan du cercle osculateur ; l'accélération normale est donc dirigée suivant la *normale principale* de la courbe. En résumé, nous parvenons à ce théorème général :

L'accélération totale dans le mouvement curviligne est la résultante de deux accélérations, l'une TANGENTIELLE, *qui est égale à la vitesse de la vitesse, l'autre* CENTRIPÈTE, *qui est dirigée suivant la normale principale, et qui est égale au carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure.*

Ces deux accélérations composantes ont chacune leur rôle dans le mouvement d'un point. C'est la première qui produit à chaque instant la variation de vitesse du mobile ; et c'est la seconde qui produit la déviation en vertu de laquelle il abandonne une direction pour en prendre une autre.

Lorsque le mouvement est rectiligne, l'accélération centripète disparaît, car le rayon de courbure devient infini, et l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle.

DÉMONSTRATION DU MÊME THÉORÈME PAR LA CONSIDÉRATION DES VITESSES.

66. Soient toujours M, M′, deux positions successives infiniment voisines du mobile sur sa trajectoire AB.

Pour trouver l'accélération totale, nous savons qu'il suffit de mener par un point C de l'espace deux droites CD, CE, égales et parallèles aux vitesses Mv, $M'v'$, du mobile aux points M et M′, et de prendre le rapport $\frac{DE}{\theta}$ de la vitesse acquise élémentaire, laquelle est représentée par le côté DE du triangle construit sur ces deux droites CD, CE, au temps θ que le mobile met à aller de M en M′.

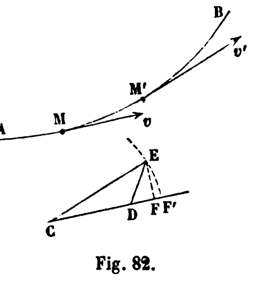


Fig. 82.

Or, nous pouvons décomposer la vitesse DE en deux vitesses simultanées, DF, FE, en projetant le point E sur la direction CF ; l'accélération $\frac{DE}{\theta}$ se décomposera de même en deux accélérations, l'une $\frac{DF}{\theta}$, parallèle à la tangente à la trajectoire au point M, et l'autre $\frac{FE}{\theta}$, normale à cette tangente, et dirigée parallèlement au plan osculateur qui contient à la fois les deux tangentes Mv, $M'v'$.

L'angle ECF est l'*angle de contingence* de l'arc MM′; il est infiniment petit, et par suite CF diffère infiniment peu de CE.

La limite du rapport $\frac{CE}{CF}$ est l'unité, et l'on peut poser

$$DF = CF - CD = CE - CD = v' - v.$$

Donc $\frac{DF}{\theta} = \frac{v'-v}{\theta}$, valeur déjà trouvée de l'accélération tangentielle.

D'un autre côté, EF se confond à la limite avec l'arc de cercle

EF′ décrit du point C comme centre avec CE pour rayon; appelons ω l'angle de contingence ECF exprimé en parties du rayon. Nous aurons

$$EF = CE \times \omega = v'\omega.$$

L'accélération centripète $\frac{EF}{\theta}$ est donc égale à $\frac{v'\omega}{\theta}$.

Mais rappelons-nous que le rayon de courbure ρ de la courbe au point M, multiplié par l'angle de contingence ω, donne la longueur de l'arc MM′. Donc

$$\omega = \frac{\text{arc MM}'}{\rho}.$$

Nous savons enfin que l'arc MM′ est égal à

$$\frac{v + v'}{2} \times \theta$$

Substituons ces valeurs de ω et de MM′:

$$j'' = \frac{v'\omega}{\theta} = \frac{v'}{\theta} \times \frac{\left(\frac{v + v'}{2}\right) \times \theta}{\rho} = \frac{\left[\frac{v'(v+v')}{2}\right]}{\rho},$$

quantité qui doit être prise à la limite, c'est-à-dire au moment où v' devient égal à v; elle se réduit alors à

$$j'' = \frac{v^2}{\rho},$$

comme nous l'avions trouvé par une autre méthode.

COURBE INDICATRICE DES ACCÉLÉRATIONS TOTALES

67. Prenons sur la trajectoire AB les points M, $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots$ positions du mobile à des intervalles de temps égaux à θ, c'est-à-dire au bout des temps θ, 2θ, 3θ, 4θ, 5θ,.... la durée θ étant supposée infiniment petite.

Menons en ces points, dans le sens du mouvement, des tangentes à la trajectoire, et prenons sur ces tangentes des longueurs Mv, $M_1 v_1$, $M_2 v_2$, $M_3 v_3$ $M_4 v_4$,... égales respectivement aux vitesses successives v, v_1, v_2, v_3, v_4,... que possède le mobile à son passage en ces différents points.

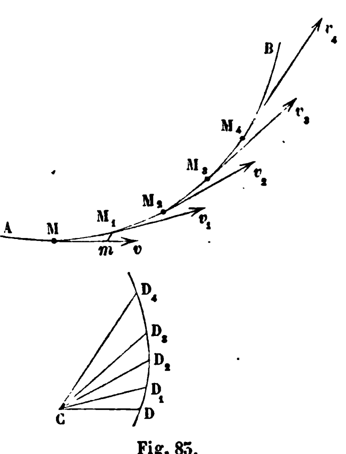


Fig. 83.

Par un point C, pris arbitrairement dans l'espace, menons des droites CD, CD_1, CD_2, CD_3, CD_4...: égales et parallèles à Mv, $M_1 v_1$, $M_2 v_2$, $M_3 v_3$, $M_4 v_4$,.... Le lieu géométrique des points D, D_1, D_2, D_3, D_4.... sera une ligne dont les arcs infiniment petits successifs DD_1, $D_1 D_2$, $D_2 D_3$, $D_3 D_4$,... seront égaux aux produits des accélérations totales par la durée θ. Cette courbe auxiliaire donne donc par ses arcs les produits $j\theta$, et par ses *rayons vecteurs* les valeurs des vitesses v. Nous l'appellerons la *courbe indicatrice des accélérations totales*.

Lorsque la trajectoire AB est plane, l'indicatrice des accélérations totales est aussi plane.

Lorsque le mouvement sur la courbe AB est uniforme, l'indicatrice des accélérations est située sur une sphère décrite du point C comme centre, puisque tous les rayons CD, CD_1,... sont égaux. Elle devient alors la courbe qu'on appelle en géométrie l'*indicatrice sphérique* de la courbe AB.

Le produit $\left(\frac{CD + CD_1}{2}\right) \times \theta$ donne la longueur de l'arc MM_1 de la trajectoire. Le produit $CD \times \theta$ est la longueur $Mm = v\theta$ que le mobile décrirait sur sa tangente Mv si à partir du point M il conservait un mouvement rectiligne et uniforme. Nous savons enfin que $mM_1 = \frac{1}{2} j\,\theta^2$; mais $j\,\theta = DD_1$; donc $mM_1 = \frac{1}{2} DD_1 \times \theta$. La *courbe indicatrice des accélérations totales* fait donc connaître les éléments utiles à l'étude du mouvement sur la trajectoire,

et notamment les directions des accélérations totales qui sont parallèles à ses tangentes.

A mesure que le mobile parcourt la trajectoire AB, on peut imaginer qu'un second mobile parcoure l'indicatrice DD_4, de manière que les deux mobiles soient à la fois aux points correspondants, M et D, M_1 et D_1, M_2 et D_2,.... des deux courbes. *Les vitesses du mobile auxiliaire sur sa trajectoire* DD_4 *seront à chaque instant égales et parallèles aux accélérations totales du mobile réel sur sa trajectoire* AB.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT PROJETÉ.

68. Soit AB la trajectoire d'un mobile, et *ab* la projection de cette trajectoire sur un plan PP′, parallèlement à une droite donnée. Soient M, M′ deux positions successives et infiniment voisines du mobile; M_1 et M'_1, les positions correspondantes du mobile projeté.

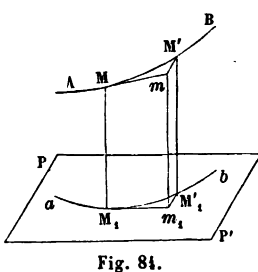


Fig. 84.

Menons la tangente M*m* à la trajectoire AB au point M ; cette droite aura pour projection sur le plan PP′ la tangente $M_1 m_1$ à la courbe *ab* au point M_1. Prenons ensuite sur la tangente à AB une longueur $Mm = v\theta$, v étant la vitesse du mobile au point M, et θ le temps que le mobile met à aller de M en M′. La projection du point *m* sur le plan PP′ sera un point m_1 de la tangente $M_1 m_1$, et $M_1 m_1$ sera égal à $v_1 \theta$, v_1 étant la vitesse du mouvement projeté; en effet $M_1 m_1$ est la projection de M*m*, ou de $v\theta$. Mais nous savons que la projection de la vitesse v est égale à la vitesse v_1 du mouvement projeté; donc la projection de $v\theta$ est égale à $v_1 \theta$; et par suite $M_1 m_1 = v_1 \theta$.

L'accélération dans le mouvement réel est égale à $\frac{2mM'}{\theta^2}$, et a pour direction la direction limite de la droite *m*M′.

L'accélération dans le mouvement projeté est égale à $\frac{2m_1 M'_1}{\theta^2}$ et a pour direction la direction limite de la droite $m_1 M_1'$.

Or cette droite $m_1 M_1'$ est la projection de la droite *m*M′.

Donc *l'accélération du mouvement projeté est, en direction et en grandeur, la projection de l'accélération du mouvement réel.*

Le même théorème a lieu lorsque, au lieu de projeter le mouvement sur un plan parallèlement à une droite, on le projette sur une droite parallèlement à un plan. La projection de la longueur Mm, prise sur la tangente, et égale à $v_1 \theta$, est une longueur $M_1 m_1$, égale à $v_1 \theta$; et la droite mM', qui par sa direction et sa grandeur définit l'accélération du mouvement dans l'espace, a pour projection une longueur $m_1 M'_1$, qui définit de même l'accélération du mouvement projeté. Ici le mouvement projeté est un mouvement rectiligne, pour lequel l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle.

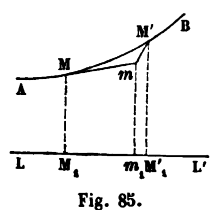


Fig. 85.

69. On rapporte habituellement, comme nous l'avons vu, le mouvement d'un point mobile à trois axes OX, OY, OZ, menés par un même point O de l'espace. Projetons sur ces trois axes le contour MmM', formé par le côté $Mm = v\theta$, pris sur la tangente à la trajectoire et le côté $mM' = \frac{1}{2} j\theta^2$, qui ramène à la position réelle M' du mobile sur sa trajectoire. La projection $M_1 m_1 M_1'$, de ce contour sur l'axe OX, se composera de deux parties : l'une $M_1 m_1 = v_x \theta$, l'autre $m_1 M'_1 = \frac{1}{2} j_x \theta^2$, projection de mM'. Nous représentons par v_x et j_x la vitesse et l'accélération du mouvement sur OX.

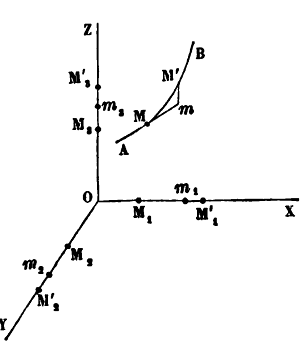


Fig. 86.

De même sur l'axe OY nous avons, en employant des notations analogues: $M_2 m_2 = v_y \theta$, et $m_2 M'_2 = \frac{1}{2} j_y \theta^2$; et sur l'axe OZ, $M_3 m_3 = v_3 \theta$ et $m_3 M'_3 = \frac{1}{2} j^z \theta^2$.

Le côté mM' a pour projections sur les trois axes $m_1 M_1'$, $m_2 M_2'$, $m_3 M_3'$; nous pouvons donc dire que mM' est la *résultante* des trois droites $m_1 M_1'$, $m_2 M_2'$, $m_3 M_3'$; car on prouverait, comme nous l'avons fait pour ladémonstration du théorème relatif aux vitesses, que mM' est la diagonale d'un parallélipipède construit au point m, sur trois arêtes menées à partir de ce point, respectivement égales et parallèles à $m_1 M'_1$, $m_2 M'_2$, $m_3 M'_3$.

Donc, *l'accélération totale du mobile dans l'espace est la résultante des accélérations des trois mouvements rectilignes obtenus en projetant le mobile sur les trois axes coordonnés* OX, OY, OZ.

70. Il résulte de là un moyen de déterminer la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe donnée dans l'espace, en un point quelconque M de cette courbe.

Supposons en effet que l'on fasse parcourir cette courbe par un mobile animé d'une vitesse constante v. L'accélération totale se réduit alors à l'accélération centripète $\frac{v^2}{\rho}$.

Fig. 87.

Or, connaissant la loi du mouvement du point mobile sur la courbe AB, nous pouvons en déduire la loi des mouvements de ses projections M_1, M_2, M_3, sur les trois axes OX, OY, OZ. Puis, des courbes des espaces décrits en projection sur ces trois axes, nous déduirons les courbes des vitesses; enfin, de celles-ci, les courbes des accélérations. Nous connaîtrons donc au moment du passage en M les valeurs des trois accélérations j_x, j_y, j_z, qui doivent se composer pour donner l'accélération totale $\frac{v^2}{\rho}$. La diagonale du parallélipipède construit sur ces trois accélérations sera la direction cherchée de la normale principale; la longueur de cette diagonale sera égale à $\frac{v^2}{\rho}$, et nous aurons le rayon de courbure ρ en divisant v^2 par cette longueur de la diagonale.

Prenons pour exemple une *hélice* AB, tracée à la surface d'un cylindre ACC'A', qui a pour axe l'axe OZ, et qui a pour base dans

le plan XOY, normal à OZ, un cercle AC décrit du point O comme centre. L'hélice fait en tous ses points le même angle avec l'axe OZ ; par suite, le mouvement uniforme d'un mobile parcourant l'hélice a pour projection sur OZ un mouvement uniforme, dont l'accélération est nulle. Nous aurons donc $j_z = 0$. Quant aux accélérations j_x, j_y, elles se composeront en une seule qui sera l'accélération du mouvement circulaire de la projection M′ du point M sur le plan XOY. Ce mouvement circulaire est aussi uniforme ; si donc on appelle v' la vitesse constante de M′ sur le cercle AC, l'accélération, j, de ce mouvement sera dirigée de M′ vers O, et sera égale à $\frac{v'^2}{R}$, R étant le rayon du cercle. Nous avons ainsi à composer au point M une accélération égale à $\frac{v'^2}{R}$, et dirigée suivant la droite MI parallèle à M′O, avec une accélération j_z, qui est nulle. La résultante est donc l'accélération $\frac{v'^2}{R}$ elle-même, dirigée suivant la droite MI.

La *normale principale* à l'hélice au point M est donc la perpendiculaire MI abaissée de ce point sur l'axe OZ de la courbe. La longueur du rayon de courbure se déduira de l'égalité

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{v'^2}{R}.$$

D'où l'on tire

$$\rho = R \times \left(\frac{v}{v'}\right)^2.$$

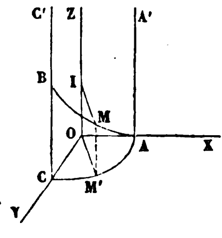


Fig. 88.

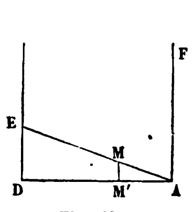


Fig. 89.

Or $\frac{v}{v'}$ est le rapport constant entre la longueur AM d'un arc

d'hélice, et la longueur AM′ de l'arc de cercle qui forme sa projection sur le plan XOY perpendiculaire à l'axe. Pour évaluer ce rapport, développons la surface du cylindre (fig. 89) : la circonférence de la base se développera suivant une droite $AD = 2\pi R$, l'hélice suivant une droite qui coupe sous un même angle toutes les génératrices AF, MM′, ED ; la quantité DE sera le *pas*, *h*, qui mesure le long d'une génératrice la distance d'une spire de l'hélice à la spire suivante. Les triangles semblables AMM′, AED, donnent la proportion :

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{AE}{AD}.$$

Or

$$AD = 2\pi R,$$

$$AE = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}.$$

Donc

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{v}{v'} = \frac{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}{2\pi R} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}.$$

Et enfin

$$\rho = R \times \left[1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right],$$

équation qui définit la longueur du rayon de courbure de l'hélice.

PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN QUELCONQUE D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME.

66. La projection orthogonale d'un cercle sur un plan oblique par rapport à son plan est une ellipse, dont le grand axe est égal au diamètre du cercle.

Soit (fig. 71) ABA′ B′ une ellipse, dont le grand axe est AA′, et le petit axe BB′ ; soit O le centre de la courbe. Cette ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale sur le plan de la figure d'un cercle décrit sur AA′ comme diamètre, dans un plan

incliné tel que le rayon OD mené dans le cercle par le point O perpendiculairement à AA′ ait pour projection le demi-petit axe OB.

Supposons qu'un mobile M parcoure avec une vitesse constante v la circonférence de ce cercle. L'accélération totale du mouvement de ce point est dirigée de M vers O, et est égale à $\frac{v^2}{a}$, a étant le rayon du cercle, c'est-à-dire le demi grand axe OA de l'ellipse.

Fig. 90.

La projection de l'accélération totale sur le plan de l'ellipse sera l'accélération totale du mouvement de la projection M′ du mobile M; elle sera donc dirigée de M′ vers O, suivant la droite M′O, projection de MO.

Les aires décrites dans le plan du cercle par le rayon vecteur MO ont pour projection sur le plan de l'ellipse les aires décrites par le rayon M′O. Or, le rapport de la projection orthogonale d'une aire plane à cette aire ne dépend que de l'angle du plan de la première aire avec le plan de projection, et par suite les aires décrites par le rayon M′O dans le plan de l'ellipse sont proportionnelles aux aires décrites par le rayon MO dans le plan du cercle; ces dernières aires croissent proportionnellement au temps, puisque la vitesse du mouvement circulaire est constante. Donc les aires décrites par le rayon M′O dans le plan de l'ellipse croissent aussi proportionnellement au temps; en d'autres termes, *la vitesse aréolaire du point* M′ *autour du centre* O *de l'ellipse est constante*.

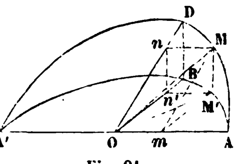


Fig. 91.

Nous verrons tout à l'heure qu'il en est de même toutes les fois que l'accélération totale passe constamment par un point fixe O.

Enfin, l'accélération totale du point M′ est proportionnelle à la distance M′O.

Pour le démontrer, considérons l'accélération totale $\frac{v^2}{a}$, du mouvement circulaire; elle est dirigée de M vers O. Nous pou-

vons la décomposer en deux accélérations, l'une j_x, accélération du mouvement de la projection m le long de l'axe OA, et l'autre j_y, accélération du mouvement de la projection n, du point M le long de l'axe OD (fig. 91*bis*). Or nous avons vu (§ 41, p. 69) que j_x est proportionnelle à la distance Om; de même, j_y est proportionnelle à la distance On. L'accélération totale du point M′ se décompose de même en deux; l'une, égale à j_x, n'est autre que l'accélération du point m, projection sur OA du point M lui-même : elle est donc proportionnelle à la distance Om; l'autre, égale à j'_y, est la projection sur OB de l'accélération j_y, laquelle est dirigée suivant le rayon OD du cercle, et est proportionnelle à On; donc j'_y, projection de j_y, est proportionnelle à On', projection de On; or le rapport $\frac{On'}{On}$ est égal au rapport $\frac{OB}{OD} = \frac{b}{a}$ des axes de l'ellipse. En définitive, l'accélération totale du mouvement du point M′ est la résultante d'une accélération j_x, proportionnelle à Om ou à M′n', et d'une accélération j'_y, proportionnelle à On' ou à M′m; la résultante des deux accélérations M′n' et M′m est représentée en grandeur par la diagonale M′O du parallélogramme construit sur M′n' et M′m; l'accélération totale est donc proportionnelle à la distance M′O.

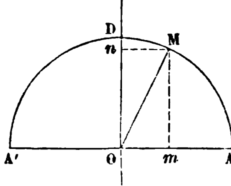


Fig. 91 *bis*.

RAYON DE COURBURE DE L'ELLIPSE.

67. Nous venons de démontrer que l'accélération totale du point M′ est dirigée vers le point fixe O et qu'elle est proportionnelle à la distance M′O, qu'enfin les aires décrites par le rayon vecteur OM′ sont proportionnelles au temps.

Soit ω la vitesse angulaire constante du rayon OM dans le cercle ADA′, qui a pour projection l'ellipse ABA′; l'accélération totale du mouvement projeté sera égale à $\omega^2 \times$ OM′. On peut déterminer le nombre constant ω. En effet, ω étant l'angle décrit dans l'unité de temps par le rayon OM, si l'on appelle T la durée du parcours entier du cercle,

$\omega \times T$ sera égal à 2π et, par suite, $\omega = \frac{2\pi}{T}$; l'accélération totale s'exprime donc par $\frac{4\pi^2}{T^2} \times OM'$.

Si on la projette sur la normale à l'ellipse au point M', on aura la composante centripète de cette accélération, c'est-à-dire $\frac{v^2}{\rho}$, en appelant v la vitesse du point M' et ρ le rayon de courbure de l'ellipse.

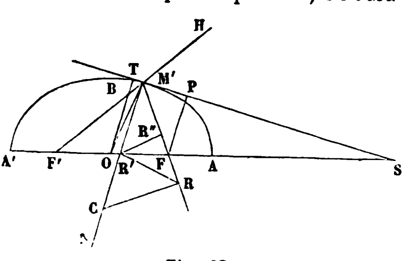


Fig. 92.

Pour évaluer la vitesse, abaissons du point O sur la tangente M' T une perpendiculaire OT.

Le produit $\frac{1}{2} v \times OT$ sera l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur OM'; or, dans le temps T, le rayon vecteur décrit la la surface de l'ellipse entière, πab. Donc

$$\frac{1}{2} \times OT \times T = \pi ab,$$

et par suite

$$v = \frac{2\pi ab}{OT \times T}.$$

L'accélération centripète a donc pour valeur

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \times (OT)^2 \times \rho}$$

et cette quantité doit être égale à la projection sur une perpendiculaire à M' T de l'accélération totale $\frac{4\pi^2}{T^2} \times OM'$. Mais OT est perpendiculaire à la tangente, et c'est par suite la projection de OM' ; donc, enfin, l'accélération normale est égale à $\frac{4\pi^2}{T^2} \times OT$ et l'on a l'équation :

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \times \overline{OT}^2 \times \rho} = \frac{4\pi^2}{T^2} \times OT.$$

D'où l'on tire, en divisant par $\frac{4\pi^2}{T^2}$,

$$\rho \times \overline{OT}^3 = a^2b^2.$$

Cette équation fait connaître le rayon de courbure ρ en fonction de la distance OT du centre de l'ellipse à la tangente. Le produit du rayon de courbure par le cube de cette distance est constant et égal au produit des carrés des demi-axes.

Nous déduirons de cette relation un théorème qui nous servira plus loin.

Soient F et F′ les deux foyers de l'ellipse. On sait que si on joint le point M′ de la courbe à F et à F′, la somme M′F + M′F′ est constante et égale à $2a$, et que la tangente M′T coupe en deux parties égales l'angle HM′F adjacent à l'angle F′M′F. Nous supposons ces deux théorèmes connus. Du point F abaissons FP perpendiculaire sur la tangente et prolongeons cette tangente jusqu'en S, point de rencontre avec la direction de l'axe AA′. Les triangles semblables OST, FSP donnent la proportion :

$$\frac{OT}{FP} = \frac{OS}{FS}.$$

Mais la bissectrice M′S de l'angle extérieur au triangle M′F′F coupe la base F′F en deux segments SF, SF′ proportionnels aux côtés adjacents M′F, M′F′ ; on a donc la proportion :

$$\frac{M'F'}{M'F} = \frac{SF'}{SF}.$$

D'où l'on déduit

$$\frac{M'F' + M'F}{M'F} = \frac{SF' + SF}{SF}.$$

Or $M'F' + M'F = 2a$ et $SF' + SF = 2OS$. Par suite

$$\frac{OS}{SF} = \frac{a}{M'F}.$$

Cette égalité, comparée à la première, nous montre que

$$OT = FP \times \frac{a}{M'F}.$$

Et, par suite, substituant dans la relation

$$\rho \times \overline{\mathrm{OT}}^3 = a^2 b^2,$$

il vient

$$\rho \times \left(\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'F}}\right)^3 \times a^3 = a^2 b^2,$$

ou bien

$$\rho \times \left(\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'F}}\right)^3 = \frac{b^2}{a}.$$

Soit M′C la normale à l'ellipse et C le centre de courbure. L'angle CM′F est égal à l'angle M′FP. Du point C, abaissons une perpendiculaire CR sur M′F ; du pied R de cette perpendiculaire, abaissons-en une autre RR′ sur M′C, et, enfin, du pied R′ de cette seconde perpendiculaire abaissons-en une troisième R′R″ sur M′F. Les triangles M′CR, M′RR′, M′R′R″ seront tous les trois semblables au triangle M′FP, et nous aurons les trois égalités :

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'F}} = \frac{\mathrm{M'R}}{\mathrm{M'C}}$$

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'F}} = \frac{\mathrm{M'R'}}{\mathrm{M'R}}$$

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'P}} = \frac{\mathrm{M'R''}}{\mathrm{M'R'}}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre, il viendra

$$\left(\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'F}}\right)^3 = \frac{\mathrm{M'R''}}{\mathrm{M'C}},$$

ou bien, en observant que M′C est égal au rayon de courbure,

$$\rho \times \left(\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{M'F}}\right)^3 = \mathrm{M'R''},$$

et par suite

$$\mathrm{M'R''} = \frac{b^2}{a}.$$

Donc la longueur M′R″ est constante.

Cette remarque donne une construction très-simple du rayon de courbure en un point M′ de l'ellipse.

Menons la normale M′N et joignons le point M′ à l'un F des foyers. Sur la droite M′F, prenons une longueur M′R″ égale à la quantité constante $\frac{b^2}{a}$; élevons R″R′ perpendiculaire à M′F et rencontrant M′N en R′; puis R′R, perpendiculaire à M′N et rencontrant la direction de M′F en R, enfin RC, perpendiculaire à M′F et rencontrant M′N en C. Le point C sera le centre de courbure et M′C le rayon de courbure de la courbe au point M′.

Des mêmes équations on déduit la relation suivante :

$$\frac{\overline{M'R}^3}{\overline{M'C}^3}=\frac{\overline{FP}^3}{\overline{M'F}^3},$$

ou bien

$$\frac{\overline{M'R}^3}{\rho^3}=\left(\frac{FP}{M'F}\right)^3$$

Donc

$$\frac{\overline{M'R}^3}{\rho^2}=\rho\times\left(\frac{FP}{M'F}\right)^3=\frac{b^2}{a}$$

et enfin,

$$\overline{M'R}^3=\rho^2\times\frac{b^2}{a}.$$

THÉORÈME DES AIRES.

68. On suppose qu'un point mobile M se meuve dans un plan, de telle sorte que le rayon vecteur mené à chaque instant du mobile M à un point fixe O pris dans ce plan, décrive en temps égaux des aires égales ; cela posé, l'accélération totale du point M est à chaque instant dirigée suivant la droite MO, dans un sens ou dans l'autre.

Pour démontrer ce théorème, nous commencerons par établir un lemme préliminaire.

Étant donnés un cercle OB et un point O pris sur ce cercle, on mène par le point O une sécante quelconque OE qui coupe le cercle en un second point C ; puis on détermine sur cette sécante un point E tel, que l'on ait

$$OC\times OE=K^2,$$

K étant une longueur constante. Le lieu des points E ainsi déterminé est une droite perpendiculaire au diamètre OB passant par le point O et le centre du cercle.

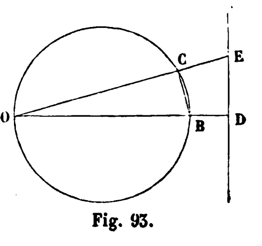


Fig. 93.

Prenons en effet sur la direction du diamètre OB un point D tel que $OB \times OD = K^2$. Le point D sera un point du lieu. Joignons DE et CB. Le quadrilatère ECBD sera inscriptible dans un cercle, en vertu de l'égalité

$$OC \times OE = OB \times OD.$$

Donc les angles opposés C et D de ce quadrilatère sont supplémentaires. Or, l'angle OCB, inscrit dans la demi-circonférence OCB, est un angle droit; donc l'angle D est aussi droit, et par suite le point E appartient à la perpendiculaire élevée sur la direction OB en un point D, déterminé de position. La perpendiculaire DE est donc le lieu cherché.

Revenons à la proposition principale.

Soit MN la trajectoire plane décrite par le point mobile, et soit O le centre fixe autour duquel sont décrites les aires.

Prenons deux positions successives très-voisines, A et A′, du point mobile sur sa trajectoire; menons à la courbe des tangentes AT, A′T′, en ces deux points; du centre O, abaissons sur ces tangentes des perpendiculaires OT, OT′.

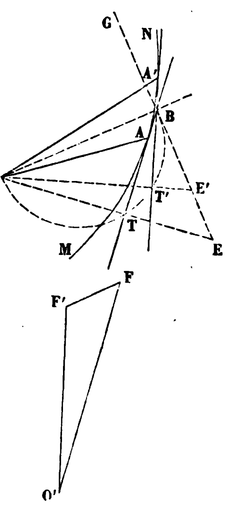


Fig. 94.

Soit v la vitesse du mobile à son passage en A. Le produit $\frac{1}{2}v \times OT \times \theta$ sera l'aire infiniment petite décrite pendant le temps infiniment petit θ par le rayon vecteur AO ; la vitesse aréolaire du point mobile est donc $\frac{1}{2}\, v \times OT$; et comme elle est constante en vertu de l'énoncé, le produit

$v \times OT$ est lui-même constant. Appelons K^2 la valeur constante de ce produit. Nous obtiendrons en conséquence la vitesse du mobile au point A en prenant sur la direction de la perpendiculaire OT une longueur OE telle que

$$OT \times OE = K^2.$$

De même, prenons sur la perpendiculaire OT′ à la tangente en A′, une longueur OE′ telle que $OT' \times OE' = K^2$, OE′ représentera la vitesse v' du mobile au point A′.

Le lieu géométrique des points E, E′, ainsi obtenu, est le résultat d'une transformation connue en géométrie sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques* de la courbe lieu des points T, T′, courbe qui est la *podaire* de la trajectoire MN, par rapport au point O.

Or la construction de la courbe EE′ revient identiquement à la construction de *l'indicatrice des accélérations;* car pour construire cette dernière courbe, on n'a qu'à mener par un point O′ une droite O′F proportionnelle et parallèle à la vitesse du mobile au point A, puis une droite O′F′ proportionnelle et parallèle à la vitesse du mobile au point A′, ce qui équivaut à prendre $O'F = OE$ et $O'F' = OE$; les directions O′F, O′F′ sont perpendiculaires à OE, OE′, et par suite le triangle OEE′ n'est autre que le triangle O′FF′ qu'on aurait fait tourner d'un angle droit, de gauche à droite, pour ensuite le ramener parallèlement à lui-même, de manière à faire coïncider le point O′ avec le point O. La direction de l'accélération totale du mobile au point A est parallèle à FF′; donc elle est perpendiculaire à EE′.

Or, les deux tangentes AT, A′T′, se coupent en un certain point B, et les points T et T′, sommets des angles droits OTB, OT′B, sont situés sur la demi-circonférence décrite sur OB comme diamètre. Les deux points E′, E, déterminés par la condition

$$OE \times OT = OE' \times OT' = K^2,$$

appartiennent, en vertu du lemme démontré tout à l'heure, à une droite EG perpendiculaire au diamètre OB. Donc l'élément EE′, auquel l'accélération totale est perpendiculaire, est lui-même perpendiculaire à la direction OB.

A la limite, les points A et A′ se rapprochent indéfiniment, et par suite la direction OB se confond avec le rayon vecteur OA. Donc la direction de l'accélération totale est la direction même du rayon vecteur mené du point mobile au centre des aires.

On prouverait facilement en suivant une marche inverse, la réciproque de ce théorème : *Quand l'accélération totale d'un mouvement plan est constamment dirigée vers un centre fixe O, la vitesse aréolaire du mobile par rapport à ce centre O est constante,* ou en d'autres termes, *les aires décrites par le rayon vecteur MO croissent proportionnellement au temps.*

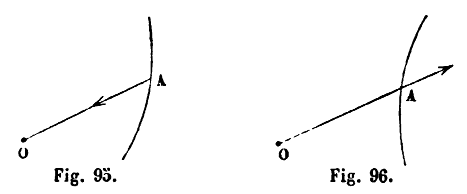


Fig. 95. Fig. 96.

Dans ces deux propositions réciproques, l'accélération peut d'ailleurs être dirigée dans le sens AO, ou dans le sens opposé, suivant que le point O est situé dans la concavité, ou en dehors de la concavité de la trajectoire.

69. En appliquant le théorème de la projection des accélérations sur un plan, on démontrera facilement les propositions suivantes :

Lorsque l'accélération totale du mouvement d'un point dans l'espace est constamment dirigée de manière à rencontrer une droite fixe, le mouvement projeté orthogonalement sur un plan normal à cette droite aura la propriété que la vitesse aréolaire en sera constante par rapport au pied de la droite fixe, prise comme centre des aires décrites. — La réciproque est vraie.

Lorsque l'accélération totale du mouvement d'un point dans l'espace est constamment dirigée vers un point fixe, les mouvements obtenus en projetant orthogonalement ce mouvement sur trois plans rectangulaires menés par ce point fixe comme origine ont tous trois des vitesses aréolaires constantes par rapport à l'origine. — La réciproque est vraie.

On peut ajouter que, dans ce dernier cas, le mouvement dans l'espace est nécessairement contenu dans un plan.

En effet, revenons à la construction des accélérations totales : deux tangentes consécutives AB, A′B′, sont situées dans un même plan, qui est le plan osculateur de la trajectoire ; ce plan contient la direction A′B de l'accélération totale, et par suite passe par le point fixe O. Le plan des tangentes A′B′, A″B″, passe aussi par le point O, et comme il a, outre le point O, une droite A′B′ commune avec le premier plan, il ne fait qu'un seul et même plan avec lui.

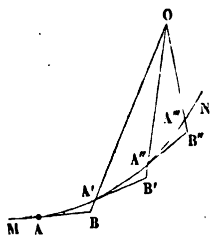


Fig. 97.

On prouverait de même que le plan des tangentes A″B″, A‴B‴, coïncide avec le plan des tangentes A′B′, A″B″, et ainsi de suite, de sorte qu'en définitive tous les éléments successifs de la trajectoire sont situés dans un même plan, qui passe par le point O. La constance de la vitesse aréolaire du point mobile par rapport à ce point O existe donc aussi pour ce plan, comme pour les mouvements projetés.

MESURE DE L'ACCÉLÉRATION TOTALE LORSQUE LA VITESSE ARÉOLAIRE EST CONSTANTE.

70. Lorsque les aires décrites par le mobile autour du point O sont proportionnelles aux temps, l'accélération totale est constamment dirigée de la position du mobile vers le centre O. Reprenons la figure qui nous a servi à établir ce théorème ; nous savons que OE, OE′, représentent les vitesses v, v', du mobile aux points A et A′ de la trajectoire ; EE′ est donc par construction égal au produit $j\theta$ de l'accélération totale par le temps très-court que le mobile emploie à aller de A en A′. Proposons-nous d'évaluer j ; il faudra pour cela évaluer d'abord EE′.

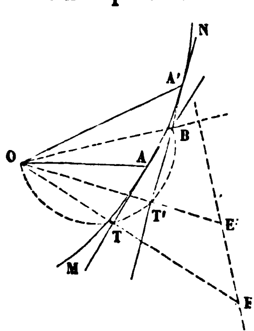


Fig. 98.

Or nous savons que $OT \times OE = OT' \times OE'$.

Donc les quatre points T, T′, E, E′, sont sur une même circonférence, et nous avons la proportion :

$$\frac{EE'}{TT'} = \frac{OE}{OT'}.$$

Remplaçons EE′ par $j\theta$, et résolvons par rapport à j :

$$j = \frac{TT' \times OE}{OT' \times \theta}.$$

Or dans le cercle OTT′ B, l'arc TT′ est sous-tendu par un angle inscrit, TBT′, qui est l'*angle de contingence* de la trajectoire. Le diamètre OB de ce cercle diffère infiniment peu du rayon vecteur $OA = r$; appelons φ l'angle de contingence, exprimé en parties du rayon ; l'angle φ aura pour mesure la moitié de l'arc TT′ dans le cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}r$; donc $\varphi = \frac{TT'}{r}$, et $TT' = r\varphi$. Nous pouvons aussi, dans l'équation qui nous donne j, remplacer OT′ par OT, avec lequel OT′ se confond à la limite.

Enfin, nous savons que $OE = v$, et que $\frac{1}{2}\,OT \times OE \times \theta =$

$\frac{1}{2}\,OT \times v\theta =$ l'aire décrite par le rayon vecteur dans le temps θ, ou enfin l'aire du secteur infiniment petit OAA′.

Donc

$$OE = \frac{2(OAA')}{OT \times \theta}.$$

Substituant ces valeurs, il vient :

$$j = \frac{r\varphi}{OT \times \theta} \times \frac{2(OAA)}{OT \times \theta} = \frac{2r}{(OT)^2} \times \frac{(OAA')}{\theta} \times \frac{\varphi}{\theta}.$$

On peut observer que $\frac{OAA'}{\theta}$ est la *vitesse de l'aire* décrite par le rayon OA, vitesse qui, par hypothèse, est une quantité constante, et que $\frac{\varphi}{\theta}$ est la *vitesse de l'angle* décrit par la tangente à la trajectoire.

Pour transformer cette expression, introduisons le rayon de courbure ρ de la trajectoire au point A. Le produit $\rho \times \varphi$ est la valeur de l'arc AA'; et par suite $\rho \times \varphi \times \frac{1}{2}$ OT = (aire OAA').

Donc

$$\varphi = \frac{2(\text{aire OAA}')}{\rho \times \text{OT}}.$$

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{2\,\text{aire OAA}'}{\theta} \times \frac{1}{\rho \times \text{OT}},$$

Substituant dans la formule :

$$j = \frac{2r}{(\text{OT})^2} \times \frac{(\text{OAA}')}{\theta} \times \frac{2(\text{OAA}')}{\theta} \times \frac{1}{\rho \times (\text{OT})} = \frac{4r}{\rho \times (\text{OT})^3} \times \left(\frac{\text{OAA}'}{\theta}\right)^2.$$

Le rapport $\frac{\text{OAA}'}{\theta}$ est constant en tous les points de la trajectoire. L'accélération j varie donc proportionnellement à la fraction

$$\frac{r}{\rho \times \overline{\text{OT}}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{OA}}{\text{AC} \times \overline{\text{OT}}^3},$$

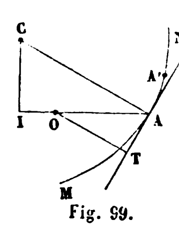


Fig. 99.

le point C de la normale AC étant le centre de courbure de la trajectoire au point A. Projetons le point C en I sur la direction AO; les deux triangles AIC, OTA sont semblables, car ils ont les angles CIA et OTA égaux comme droits, et les angles CAI, AOT, égaux comme alternes-internes. Donc nous avons la proportion :

$$\frac{\text{OA}}{\text{AC}} = \frac{\text{OT}}{\text{AI}}.$$

Donc

$$\frac{\text{OA}}{\text{AC} \times \overline{\text{OT}}^3} = \frac{1}{\text{AI} \times \overline{\text{OT}}^2}.$$

On en déduit :

$$j = 4 \times \left(\frac{\text{OAA}'}{\theta}\right)^2 \times \frac{1}{\text{AI} \times \overline{\text{OT}}^2},$$

ou bien, en éliminant OT ,

$$j = 4 \left(\frac{\text{OAA}'}{\theta}\right)^2 \times \frac{1}{\overline{\text{OA}}^2} \times \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\overline{\text{AI}}^3}.$$

APPLICATION AU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.

71. Kepler a reconnu que *chacune des planètes du système solaire décrit une ellipse dont le soleil occupe l'un des foyers, et que le rayon vecteur mené du soleil à cette planète décrit des aires égales en temps égaux.*

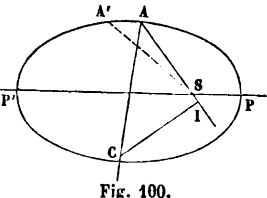


Fig. 100.

On conclut immédiatement de cette seconde loi que l'accélération totale de la planète est constamment dirigée vers le soleil ; il reste à mesurer cette accélération.

Soit $PP' = 2a$ le grand axe de l'ellipse décrite par la planète ; S, l'un des foyers de cette ellipse, celui qu'occupe le soleil. L'accélération totale de la planète à son passage au point A est dirigée suivant AS, et elle a pour valeur,

$$j = 4 \left(\frac{\text{SAA}'}{\theta}\right)^2 \times \frac{1}{\overline{\text{SA}}^2} \times \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\overline{\text{AI}}^3},$$

C étant le centre de courbure de l'ellipse au point A, et I la projection de ce centre sur le rayon vecteur AS.

Le rapport $\frac{\text{SAA}'}{\theta}$ est l'aire décrite pendant l'unité de temps. Si donc T est le temps d'une révolution entière de la planète, et S l'aire de l'ellipse, ou le produit πab, on aura

$$\frac{\text{SAA}'}{\theta} = \frac{\text{S}}{\text{T}} = \frac{\pi ab}{\text{T}}.$$

La quantité b est le demi petit axe de l'ellipse. Elle est liée au demi grand axe a par la relation

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2,$$

e étant ce qu'on appelle l'excentricité relative de l'ellipse. On en déduit :

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

La formule à appliquer devient donc :

$$j = 4\pi^2 \frac{a^4}{T^2}(1 - e^2) \times \frac{1}{\overline{SA}^2} \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AI}^3}.$$

Mais dans l'ellipse on a (§ 67) l'égalité suivante :

$$\overline{AI}^3 = \overline{AC}^2 \times \frac{b^2}{a} = \overline{AC}^2 \times a \times (1 - e^2);$$

il en résulte :

$$j = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} \times \frac{1}{\overline{SA}^2} \times \frac{1}{a(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \times \frac{1}{\overline{SA}^2}.$$

Donc l'accélération totale j de la planète est à chaque instant inversement proportionnelle au carré de sa distance SA au soleil.

Kepler a reconnu plus tard que le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ ne varie pas d'une planète à l'autre, et il a formulé ainsi qu'il suit sa troisième loi : *Les carrés des temps des révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes.*

Donc l'accélération, pour toute planète du système solaire, est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette planète au soleil.

Nous montrerons comment Newton a pu déduire de ce fait cinématique la loi de la gravitation universelle.

CHAPITRE V

MOUVEMENT DES SYSTÈMES INVARIABLES.

DÉFINITION DES SYSTÈMES INVARIABLES.

72. On appelle en mécanique *système invariable* un ensemble de points dont les positions relatives ne peuvent être altérées. Un corps solide naturel est *à peu près* dans ces conditions : il y est à peu près seulement, parce que les forces qui agissent sur lui, si petites qu'elles soient, en altèrent légèrement la forme. Aussi on désigne souvent les systèmes invariables sous le nom de solides géométriques, par opposition aux *solides naturels* dont l'invariabilité n'est pas absolue. Un système invariable n'est après tout qu'une conception de l'esprit, et on n'en rencontre point dans les applications.

Supposons qu'un système invariable soit composé de n points distincts. Prenons parmi ces n points trois points particuliers A, B, C, non en ligne droite. Les distances AB, BC, AC, seront des quantités constantes, que l'on peut supposer connues. Pour définir la position occupée dans le système par l'un quelconque M des $n-3$ autres points, on donnera les trois distances MA, MB, MC de ce point aux trois points A, B et C. La position effective du point M reste encore ambiguë avec ces données ; car les distances MA, MB, MC, conviennent également au point M′ symétrique de M par rapport au plan ABC. La position relative des n points sera donc entière-

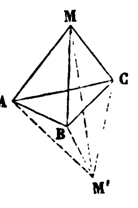


Fig. 101.

ment définie, sauf cette ambiguïté, si l'on donne : 1° les trois distances AB, BC, AC, ou les trois côtés du triangle ABC; 2° les trois distances à A, à B et à C, des $n-3$ autres points. Le nombre des données nécessaires pour définir la forme d'un système de n points est donc égal à

$$3+3\times(n-3),$$

ou bien à $3n-6$.

73. Cherchons ensuite le nombre de conditions nécessaires pour définir la position d'un système invariable dans l'espace.

Prenons encore trois points A, B, C, du système, non en ligne droite : la position du système sera entièrement définie, dès que les trois points A, B et C seront connus de position. On peut rapporter la position de ces points à trois plans rectangulaires XOY, YOZ, ZOX; la position du premier point A sera connue par les trois coordonnées x, y, z de ce point. La position du point B n'est plus alors entièrement arbitraire, car la distance AB étant donnée, le point B se trouve sur une sphère décrite du point A comme centre avec cette distance AB pour rayon. Il suffira donc de donner deux des coordonnées du second point B, par exemple x_1 et y_1; la troisième coordonnée z_1 s'en déduira en cherchant l'intersection de la sphère avec la droite menée parallèlement à OZ par le point b du plan XOY, qui a pour coordonnée x_1 et y_1. Cette droite coupe la sphère en deux points, et le point B cherché est l'un ou l'autre de ces points. Les conditions particulières de la question que l'on traite indiqueront celle des deux solutions qu'on doit adopter.

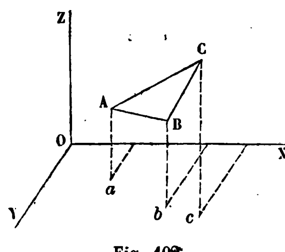


Fig. 102.

Ce choix fait, le troisième point C, dont les distances CA, CB, à deux points fixes sont connues, est assujetti à se trouver sur une circonférence de cercle qui a son centre sur la droite AB, et par suite il n'y a qu'une coordonnée à fixer pour que la position de ce point soit connue. Si l'on donne la coordonnée x_2, par exemple, le point C sera à l'intersection de cette circonférence avec le plan

mené parallèlement à YOZ, à une distance x_2 de l'origine. Il y aura encore ici généralement deux solutions.

En résumé, la position du système est déterminée si l'on fait connaître :

les trois coordonnées, x, y, z, du point A,
deux des coordonnées, x_1, y_1, du point B,
et une des coordonnées, x_2, du point C,
ce qui fait en tout six conditions.

On prouverait de même que la position d'une *figure invariable*, mobile dans un plan ou plus généralement sur une surface, est déterminée quand on fixe la position de deux de ses points, ce qui exige trois conditions, et que le nombre des conditions nécessaires pour définir la position relative de n points formant une figure invariable située sur un plan ou sur une surface est égal à $2n - 3$: savoir la distance AB de deux points A et B pris dans la figure, et les deux distances MA, MB, de chacun des $n - 2$ autres points à ces deux-là : en tout $1 + 2(n - 2) = 2n - 3$.

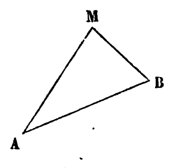


Fig. 103.

MOUVEMENTS SIMPLES DES SYSTÈMES INVARIABLES. — TRANSLATION.

74. On dit qu'un système invariable mobile dans l'espace a un *mouvement de translation*, lorsque tous les points du système décrivent simultanément des portions de trajectoires égales et parallèles.

La position du système à une époque quelconque est entièrement définie par les positions de trois de ses points non en ligne droite. Soient M, N, P, ces trois points.

Soit AB la trajectoire du point M, A_1B_1 la trajectoire du second point N, A_2B_2 la trajectoire du troisième P, *non en ligne droite avec les deux premiers* ; le mouvement du système sera une translation, si les trajectoires AB, A_1B_1, A_2B_2 sont trois positions parallèles entre elles d'un seul et même arc de courbe.

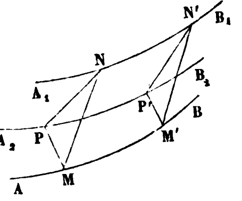


Fig. 104.

A un certain moment, les trois points occupent sur ces trois trajectoires les positions M, N, P ; à un autre moment, le point M s'est transporté en M′, le point N en N′, et le point P en P′ ; le triangle MPN est venu en M′ P′ N′ ; or ce transport n'a pas altéré les côtés du triangle, et la courbe $A'_1 B'_1$ n'étant, par hypothèse, autre chose que la courbe AB déplacée parallèlement à elle-même d'une quantité MN, on a à la fois M′ N′ = MN, et arc NN′ = arc MM′. On prouverait de même que arc PP′ = arc MM′ = arc NN′. En définitive, le triangle M′ P′ N′ a ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle MPN. Il en serait de même de tous les triangles formés en joignant dans le système trois points non en ligne droite ; de sorte que, dans ce genre particulier de déplacement, les arcs des trajectoires décrites à la fois par les divers points du système sont égaux et parallèles.

Si, au lieu de considérer les positions du système à deux époques quelconques, nous prenons ces positions à deux époques infiniment voisines, le point M décrit, dans l'intervalle de temps infiniment petit qui sépare les deux époques, un élément rectiligne MM′ de sa trajectoire AB ; et tous les autres points N, P, décrivent des éléments NN′, PP′, égaux et parallèles à MM′. Il en résulte que *les vitesses de tous les points, dans le mouvement de translation, sont égales et parallèles :* parallèles, parce qu'elles ont pour directions les directions des éléments MM′, PP′, NN′... ; égales, parce qu'elles expriment le rapport de l'espace parcouru MM′, NN′, PP′, qui est le même pour tous les points, à l'intervalle de temps θ employé par le corps à passer de la position MPN à la position M′ P′ N′.

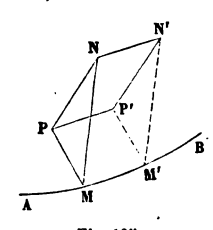


Fig. 105.

ROTATION.

75. Le second mouvement simple d'un système solide est le *mouvement de rotation.*

Le système est lié invariablement à une droite fixe AB, nommée *axe de rotation*, de sorte que si on abaisse d'un des points mobiles une perpendiculaire MP sur AB, le mouvement du système laissera constante cette longueur MP. Le lieu décrit par le

point M est donc une circonférence, dont le centre P est un point de l'axe AB, et dont le plan est perpendiculaire à cet axe. Un autre point N du système décrira une seconde circonférence dont le plan sera également perpendiculaire à AB, et dont le centre sera le point Q, projection du point N sur l'axe. La distance MN de deux points quelconques du système n'est pas altérée par le déplacement commun, puisque le système est supposé solide. Par le point P, menons PN_1, égale et parallèle à QN. Joignons NN_1, et N_1M. La droite QN est perpendiculaire à AB; donc PN_1, parallèle à QN, est aussi perpendiculaire à AB, et appartient au plan du cercle décrit par le point M. Mais NN_1 est égal et parallèle à PQ, comme côtés opposés d'un parallélogramme QPN_1N. Donc NN_1 est perpendiculaire au plan du même cercle, et par suite à la droite N_1M qui passe par son pied dans ce plan. Le triangle MNN_1 est donc rectangle en N_1. Le côté NN_1 de l'angle droit n'est pas altéré par le déplacement du solide, puisqu'il est constamment égal à PQ. L'hypoténuse NM ne l'est pas non plus; donc le troisième côté MN_1 est constant pendant le mouvement. Or MN_1 est le troisième côté d'un triangle PN_1M, dans lequel les côtés PM et $PN_1 = QN$ restent constants; et comme il est constant lui-même, l'angle MPN_1 reste constant aussi.

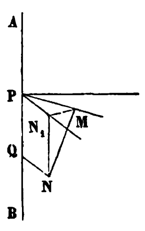


Fig. 106.

Donc enfin, *dans le mouvement de rotation d'un système solide autour d'un axe* AB, *l'angle* MPN_1 *de deux rayons* MP, NQ, *abaissés de deux points du système perpendiculairement à l'axe, reste constant*[1].

Si le premier rayon MP décrit dans le plan du cercle MP un angle α très-petit, dans un temps θ très-court, le second rayon NQ décrira dans le plan du cercle NQ, ce même angle α; de sorte que *la vitesse angulaire*, $\frac{\alpha}{\theta}$, sera la même pour ces deux rayons.

[1] On appelle angle de deux directions qui ne se rencontrent pas, l'angle formé par deux droites menées parallèlement à ces directions par un même point de l'espace.

Donc, *dans le mouvement de rotation, la vitesse angulaire de chaque point autour de l'axe est à un même instant la même pour tous les points du système.*

La vitesse *linéaire* du point M s'obtiendra en divisant par θ l'arc très-petit décrit par le point M ; or cet arc de cercle correspond à un angle au centre égal à α. Appelons r la distance MP; α étant évalué en parties du rayon, l'arc décrit par le point M sera $r\alpha$, et par suite la vitesse linéaire du point M sera $\frac{r\alpha}{\theta} = \frac{\alpha}{\theta} \times r$; c'est le produit de la vitesse angulaire commune à tous les points du système par la distance du point considéré à l'axe.

Donc, *dans le mouvement de rotation, la vitesse linéaire d'un point est le produit de la vitesse angulaire commune à tous les points du système, par la distance du point considéré à l'axe ; et les vitesses linéaires de deux points, à un même instant, sont proportionnelles aux distances de ces points à l'axe de rotation.*

Ainsi, à un même instant, les vitesses linéaires des divers points d'un corps solide animé d'un mouvement de *translation* sont égales et parallèles, et les vitesses angulaires de tous les points d'un corps solide animé d'un mouvement de *rotation* autour d'un certain axe sont égales ; la vitesse linéaire d'un point particulier du système tournant est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe, et sa direction fait un angle droit non-seulement avec l'axe, mais encore avec le rayon abaissé du point perpendiculairement à l'axe de rotation.

MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

76. On appelle *mouvement élémentaire* d'un système solide le mouvement que ce système subit pendant un temps très-court θ ; dans ce petit intervalle de temps, chaque point M décrit un petit élément rectiligne MM' sur sa trajectoire, de sorte que si l'on considère les positions de tous les points du système au commencement et à la fin du temps θ infiniment petit, on pourra dire que chaque point M du système aura décrit,

M' M

Fig. 107.

pendant cet intervalle de temps, la droite très-petite MM′ qui joint la première position M de ce point à la seconde position M′.

Le principe de la coexistence des mouvements élémentaires permet de décomposer le mouvement de chaque point du système en plusieurs autres mouvements, et nous ferons voir qu'on peut de cette manière ramener tout mouvement élémentaire d'un solide à des mouvements élémentaires de rotation et de translation, tels que nous venons de les définir.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN. — CENTRE INSTANTANÉ.

77. *Lorsqu'une figure invariable plane se meut dans son plan, on peut toujours amener cette figure d'une de ses positions à une autre position par une rotation unique autour d'une droite perpendiculaire au plan.*

La position de la figure dans son plan est entièrement définie par les positions particulières de deux points de cette figure. Prenons donc deux points A et B de la figure dans sa première position, et considérons les positions A′ et B′ de ces mêmes points A et B dans la seconde position de la figure. Nous aurons AB = A′B′, et si nous menons deux droites indéfinies AB, A′B′ tous les points de la droite AB, considérés comme faisant partie de la figure, viendront occuper les points correspondants de la droite indéfinie A′B′, lorsque la figure mobile passe de la première position à la seconde. Ces deux droites AB, A′B′, se coupent généralement en un certain point C, point d'intersection qui peut être envisagé à deux points de vue. Si on le regarde comme appartenant à la droite A′B′, c'est un point de la figure dans sa seconde position, et pour trouver le point D qui lui correspond dans la première, il suffit de prendre AD = A′C. Si au contraire on regarde le point C comme appartenant à la droite AB, il fait partie de la figure dans sa première position, et par suite il y a dans la seconde position de la figure un point E qui lui correspond; ce point E

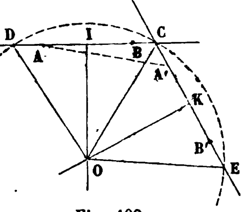


Fig. 108.

s'obtiendra en prenant sur le prolongement de A′B′ une longueur B′E = BC. Nous aurons donc en définitive CD = CE. Prenons les milieux I et K de ces deux droites égales CD, CE, et élevons en ces points deux perpendiculaires IO, KO, aux directions des droites AB, A′B′. Le point O également distant des trois points D, C, E, sera le centre d'une circonférence passant par ces trois points. Les cordes CD, CE étant égales, les angles au centre DOC, COE sont aussi égaux, de sorte que si l'on fait tourner la figure, prise dans sa première position, autour d'un axe perpendiculaire à son plan mené par le point O, et qu'on lui fasse décrire l'angle DOC, on amènera par cette rotation unique le point D à coïncider avec le point C, et le point C à coïncider avec le point E; la rotation suffit donc pour amener la figure de la première position à la seconde.

Remarque: Si l'on considère deux points A, A′, qui se correspondent dans les deux positions de la figure, le point A, par la rotation autour de l'axe O, vient se placer en A′ après avoir décrit un arc de cercle ayant le point O pour centre. Donc le point O est également distant des points A et A′.

Ceci a lieu pour tous les points de la figure plane, de sorte qu'on peut énoncer le théorème de la manière suivante : *Les perpendiculaires élevées au milieu des droites* AA′ *qui joignent deux positions d'un même point, concourent en un même point* O. On peut ajouter que *l'angle* AOA′ *est le même quels que soient les points considérés.*

78. *Corollaire.* Supposons que les deux positions de la figure soient infiniment voisines l'une de l'autre. Alors chacune des droites AA′, qui joignent deux positions successives très-rapprochées A et A′ d'un même point de la figure mobile, devient un arc infiniment petit de la trajectoire de ce point; la perpendiculaire élevée sur le milieu de AA′ devient à la limite la *normale* à la trajectoire, et l'angle AOA′ est l'angle infiniment petit dont on fait tourner la figure autour du point O, ou plutôt autour de l'axe projeté en O. Le déplacement considéré est enfin le *déplacement élémentaire* de la figure. De là résulte ce théorème :

Quand une figure plane invariable se meut dans son plan, 1° *les normales élevées à un même moment aux trajectoires des différents points passent par un même point* O, *qu'on appelle le*

CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION ; 2° *pendant un temps très-court la figure tourne d'un angle infiniment petit autour de ce centre* O; 3° *les arcs décrits pendant un temps très-court par les divers points de la figure sont proportionnels aux distances de ces points au point* O.

79. Dans tout ce qui précède nous avons supposé qu'il s'agissait d'une figure plane; il est facile de voir que *les mêmes conséquences s'appliquent à un solide invariable lorsqu'il se meut parallèlement à un plan fixe;* de sorte que l'on peut dire plus généralement :

Le mouvement élémentaire d'un solide qui se meut parallèlement à un plan fixe est une rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. La position de l'axe se déterminera en cherchant le centre instantané de rotation de l'une des figures planes obtenues en coupant le solide par un plan parallèle au plan fixe. Cette figure plane ne sortant pas de son plan par suite du mouvement du solide, subit un déplacement élémentaire qui est une rotation infiniment petite autour d'un point O de son plan. Le solide entier subit donc la même rotation autour de l'axe élevé par le point O perpendiculairement au plan fixe.

CONSTRUCTION DE TANGENTES A CERTAINES COURBES.

80. Lorsqu'une figure plane de forme invariable se meut dans son plan, les normales élevées à un même moment aux trajectoires des différents points de cette figure passent par un même point O, centre instantané du mouvement de rotation élémentaire. Si donc on peut construire les normales aux trajectoires de deux points A et B de la figure, l'intersection de ces deux normales déterminera le point O, et on aura la normale à la trajectoire d'un troisième point C en joignant CO.

Soit par exemple (fig. 109) un triangle ABC de forme constante, qui se meut dans le plan du papier, de telle sorte que les deux sommets A et B glissent respectivement sur deux droites fixes LX, LY; le point C décrit dans ce mouvement une certaine courbe, et l'on propose de mener la tangente à cette courbe.

On observera que la trajectoire du point A étant la droite

LY, la normale à la trajectoire est la perpendiculaire AO élevée au point A sur cette droite; de même la normale à la trajectoire du point B est la perpendiculaire BO élevée en B sur la droite LX. Le point O est le centre autour duquel la figure tourne pendant un temps infiniment petit quand elle passe de sa position ABC à une position infiniment voisine. Dans ce mouvement, le point C décrit un élément normal à OC. On obtiendra donc la tangente à la courbe décrite par le point C en menant une droite CD perpendiculaire à OC.

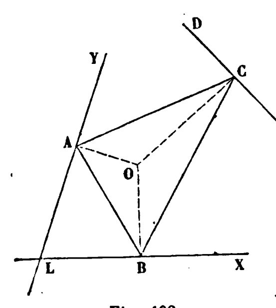


Fig. 109.

Les vitesses simultanées des trois points A, B, C, sont proportionnelles aux longueurs OA, OB, OC.

81. Pour second exemple prenons le mécanisme employé dans les machines à vapeur sous le nom de *transmission par bielle et manivelle.*

Un point A est assujetti à se déplacer le long de la droite FX; le point B est assujetti à se mouvoir le long d'une circonférence ayant pour centre un point F de cette droite, et la longueur AB est constante.

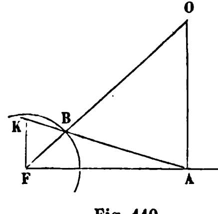


Fig. 110.

AB représente la *bielle*, BF la *manivelle ;* F est le centre de l'arbre de rotation; le point A est la *tête* de la tige du piston qui reçoit dans le cylindre un mouvement alternatif; le point B est le *bouton* de la manivelle.

Le point B décrivant une circonférence, le centre instantané de la bielle est situé quelque part sur le rayon FB prolongé, car ce rayon est normal à la circonférence au point B. Le centre instantané est de plus situé sur une perpendiculaire élevée au point A sur la droite FX, trajectoire du point A. Donc il est en O à l'intersection de ces deux droites.

Les vitesses simultanées du point B et du point A sont entre

elles comme les distances OB et OA. Si donc v est la vitesse linéaire du point A, c'est-à-dire du piston, et V la vitesse linéaire du bouton de la manivelle, nous aurons

$$\frac{V}{v}=\frac{OB}{OA}.$$

Par le point F, menons FK perpendiculaire à FX, et prolongeons AB jusqu'à la rencontre de FK. Les triangles BFK, BOA sont semblables et par suite

$$\frac{OB}{OA}=\frac{FB}{FK}.$$

Donc

$$\frac{V}{v}=\frac{FB}{FK}.$$

Mais le point B, considéré comme appartenant à la manivelle FB, tourne autour du point O avec une certaine vitesse angulaire ω, et sa vitesse linéaire V est égale au produit $FB \times \omega$. Remplaçant V par cette valeur dans l'équation précédente, il vient, en supprimant le facteur commun FB,

$$v = FK \times \omega,$$

relation entre la *vitesse linéaire* v du piston et la *vitesse angulaire* ω de l'arbre de rotation. Si la vitesse ω est sensiblement constante, la vitesse du piston v est variable proportionnellement à la distance FK; elle est nulle quand FK est nulle, c'est-à-dire quand les trois points A, B et F sont en ligne droite, ou quand la manivelle passe aux *points morts* (fig. 111); elle est maximum quand FK est maximum, c'est-à-dire quand la manivelle FB est perpendiculaire à FA. A ce moment, le point O est donné par l'intersection de deux droites parallèles $F_1 B_1$, $A_1 O_1$, et se trouve infiniment éloigné; *la rotation instantanée se change alors en translation;* car tous les points de la bielle $A_1 B_1$ ont à cet instant des vitesses égales, parallèles à la droite AF.

En général, la translation peut être regardée comme une rotation infiniment petite autour d'un axe infiniment éloigné. Toutes les normales élevées simultanément sur les trajectoires des différents points de la figure concourant en un point infiniment éloigné, sont parallèles; les éléments de trajectoires sont donc aussi parallèles; de plus les produits $OA \times \omega$ des distances de chaque point par la vitesse angulaire commune à tout le système, devien-

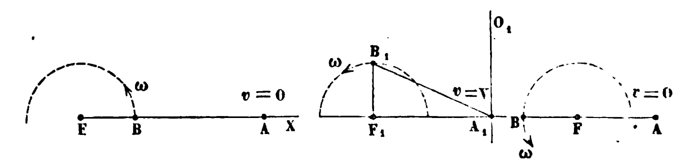


Fig. 111.

nent tous égaux, lorsque le facteur OA croît au delà de toute limite; tous les points ont donc une vitesse linéaire égale, limite ou *vraie valeur* du produit $OA \times \omega$, dans lequel OA croît indéfiniment tandis que ω diminue jusqu'à devenir nul.

82. La considération du centre instantané de rotation peut servir aussi à déterminer le point où se coupent deux positions successives infiniment voisines d'une ligne qui se déplace sans changer de forme.

Soient MN, M′N′, deux positions successives infiniment voisines d'une même ligne dans son plan. Soit AA′ le chemin décrit par un point A de la ligne pour aller de sa première position A à sa seconde A′; soit BB′ le chemin décrit par un autre point B. Le centre instantané O s'obtiendra en élevant les droites AO, BO, normales à AA′, BB′, et en cherchant leur intersection O. Joignons le point O à un point quelconque C de la première position de la ligne mobile. Si l'angle du rayon OC avec la courbe prise dans le sens CN est aigu, le déplacement du point C, par suite de la rotation de la figure, s'opérera de manière à amener ce point en C′ d'un certain côté de MN, au delà de MN par

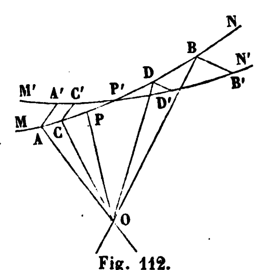


Fig. 112.

rapport au point O, par exemple. Le contraire arrivera pour un autre point D, si l'angle de OD avec la courbe, prise dans le même sens, est obtus au lieu d'être aigu ; ce point passera en D', en deçà de MN par rapport au point O. Donc la courbe M' N' coupe la courbe de MN en un certain point compris entre les points C et D ; en définitive le point de rencontre des deux positions MN, M' N' infiniment voisines, est le pied P de la normale abaissée du point O sur la courbe. Ce point P considéré comme lié à la courbe se déplace suivant la courbe elle-même par suite de la rotation instantanée, et l'élément qu'il décrit appartient à une ligne tangente à la courbe MN.

Par exemple faisons glisser une droite AB, de longueur constante, dans l'angle droit formé par deux droites fixes CX, CY. A un instant particulier, le centre instantané de la droite AB est le point O, intersection des normales AO, BO, élevées aux trajectoires des points A et B, et le point P, pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur AB est un point du *lieu des intersections successives* de la droite AB, ou, comme on dit, de la *courbe enveloppe* des positions de cette droite.

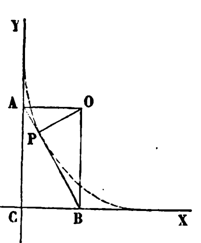


Fig. 113.

83. *Cycloïde*. La cycloïde est la courbe EFHG, engendrée par le mouvement d'un point F d'une circonférence OC, qui *roule sans glisser* sur une droite fixe AB.

Il résulte de cette génération qu'à un instant quelconque l'arc CF, compris sur la circonférence entre le point décrivant et le point de contact C de la circonférence avec la droite AB, est égal à la longueur CE comprise sur cette droite entre le point de contact C et le point de départ E de la cycloïde.

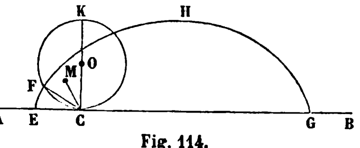


Fig. 114.

Proposons-nous de mener la tangente à la cycloïde au point F.

Pour y parvenir remplaçons le cercle OC par un polygone d'un très-grand nombre de côtés, et voyons ce qui se passe lorsque ce polygone *roule sans glisser* sur la droite AB.

Le polygone vient successivement appliquer ses côtés sur la

droite AB : soit *cd* le côté actuellement en contact ; le mouvement par lequel le polygone viendra appliquer sur AB le côté *de* à la suite du côté *cd*, sera une rotation autour du point *d*, sommet commun à ces deux côtés consécutifs. On voit donc que dans ce mouvement de roulement du polygone sur la droite, les sommets successifs du polygone servent, chacun à leur tour, de *centres de rotation*.

Fig. 115.

Lorsque le nombre des côtés du polygone augmente au delà de toute limite, le polygone se confond avec le cercle OC; la rotation s'opère toujours autour du sommet du polygone qui se trouve actuellement sur la droite AB; donc à la limite elle s'opère autour du point C, point de contact du cercle et de la droite.

La droite CF (fig. 114) menée du point C au point décrivant est donc la normale à la cycloïde au point F, et la tangente à la cycloïde, qui lui est perpendiculaire, s'obtiendra en joignant le point F au point K, extrémité du diamètre du cercle générateur qui passe au point C.

Par la même raison, la courbe décrite par un point M quelconque lié au cercle mobile, et entraîné dans son mouvement de roulement, a pour normale la droite CM.

84. Le même raisonnement prouverait que quand une courbe mobile PQ roule sans glisser sur une courbe fixe AB, la normale au lieu décrit par un point M invariablement lié à la courbe mobile, s'obtient en joignant la position du point M à un certain instant, au point de contact C par lequel les deux courbes se touchent au même instant.

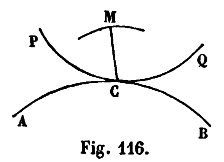


Fig. 116.

Le mouvement de roulement d'une courbe plane sur une courbe fixe tracée dans son plan prend le nom de *mouvement épicycloïdal*. L'*épicycloïde* est d'une manière générale la ligne décrite par un point d'une figure de forme constante dont une courbe roule sans glisser sur une ligne fixe. La cycloïde est l'épicycloïde particulière obtenue en prenant pour ligne fixe une droite, pour courbe mobile un cercle, et pour point décrivant un point de la circonférence de ce cercle.

MOUVEMENT CONTINU D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

85. Nous savons que le mouvement élémentaire d'une figure plane dans son plan est une rotation autour d'un certain point O appelé centre instantané de rotation. Le mouvement continu de la figure est donc une suite de rotations infiniment petites, ω, ω', ω'',... qu'on peut supposer connues, autour de centres successifs infiniment voisins, dont la position est supposée donnée sur le plan.

Soient O, O', O'', O''', les centres successifs autour desquels s'opèrent ces rotations. Considérons l'instant où la figure mobile pivote autour du point O. Cette rotation amènera un certain point O_1 de la figure à coïncider avec le centre suivant O'; pour trouver ce point O_1, il suffit de connaître l'angle ω dont la figure tourne autour du point O, de mener OO_1 dans une direction qui fasse avec OO' l'angle $O_1OO' = \omega$, et de prendre $OO_1 = OO'$. De cette construction il résulte en effet que la rotation ω de la figure autour de O amènera le point mobile O_1 à coincider avec le point fixe O'.

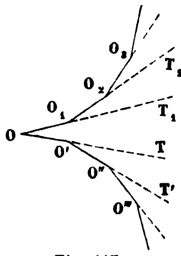


Fig. 117.

La seconde rotation s'effectue autour du point O', avec lequel coïncide alors le point O_1. Il sera facile de trouver, par une construction analogue, le point O_2 de la figure mobile qui viendra coïncider avec le centre de rotation suivant, O''. Prolongeons indéfiniment dans un même sens les côtés OO', O'O'',... OO_1, O_1O_2,... Le point cherché est à une distance du point O_1 égale à O'O''; de plus la rotation qui amène O_2 sur O'' s'opère autour du point O', et fait décrire à la figure mobile un angle total égal à la somme $O_2O_1T_1 + TO'O''$; c'est cet angle que nous avons désigné tout à l'heure par ω'. Et comme TO'O'' est donné par la figure connue OO'O''O''', l'angle $T_1O_1O_2$ s'en déduit par l'équation :

$$T_1O_1O_2 = \omega' - TO'O''.$$

On pourra donc construire le point O_2 en faisant l'angle $T_1O_1O_2 = \omega' - TO'O''$, et en prenant $O_1O_2 = O'O''$.

On trouverait de même le point O_3 qui coïncidera avec le point O''' en faisant au point O_2 un angle $T_2O_2O_3 = \omega'' - T'O''O'''$, et en prenant $O_2O_3 = O''O'''$.

Le mouvement de la figure mobile peut donc se définir par le roulement du polygone $OO_1O_2O_3$.... lié invariablement à cette figure, sur le polygone $OO'O''O'''$... fixe dans le plan. A la limite, ces polygones se changent en des courbes, dont l'une roule sans glisser sur l'autre; et l'on parvient ainsi à ce théorème : *Tout mouvement continu d'une figure plane dans son plan est un mouvement épicycloïdal.*

Lorsqu'à la limite, les côtés OO', $O'O''$, sont infiniment petits, les angles $TO'O''$, $T'O''O'''$,... sont les *angles de contingence* de la courbe fixe, et les angles $T_1O_1O_2$, $T_2O_2O_3$, sont les *angles de contingence* de la courbe mobile. A un instant quelconque, la courbe mobile tourne autour de son point de contact avec la courbe fixe, d'un angle qui est la somme des angles de contingence des deux courbes. On peut déduire de là une relation entre la vitesse angulaire de la rotation instantanée, et la vitesse linéaire avec laquelle le point géométrique de contact se déplace le long des deux courbes. Soit $R = OA$ le rayon de courbure de la courbe fixe OB, $\rho = OC$ le rayon de courbure de la courbe mobile OD. Soit v la vitesse avec laquelle le point géométrique de contact se déplace le long des deux courbes constamment tangentes l'une à l'autre. Dans un temps infiniment petit θ, l'arc $OO' = OO_1$, parcouru sur chacune des deux courbes par le point de contact, sera égal à $v\theta$; or à cet arc correspond dans la courbe fixe un angle de contingence égal à $\frac{v\theta}{R}$, et dans la courbe mobile, un angle de contingence égal à $\frac{v\theta}{\rho}$. La courbe mobile décrit donc dans le temps θ un angle total égal à la somme :

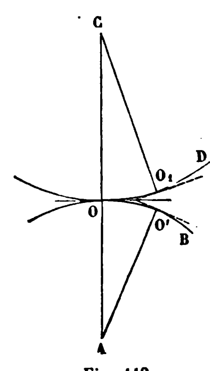


Fig. 118.

$$\frac{v\theta}{R} + \frac{v\theta}{\rho} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho}\right) v\theta$$

La vitesse angulaire ω s'obtient en divisant l'angle décrit par le temps θ mis à le décrire ; donc

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Si les courbures des deux courbes étaient dans le même sens, on trouverait de même

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right),$$

ou bien

$$\omega = v\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right).$$

86. Pour donner un exemple de mouvement épicycloïdal, considérons le mouvement d'une droite AB de longueur constante, dont les extrémités A et B glissent respectivement sur deux droites fixes rectangulaires CX, CY. Cherchons comment nous obtiendrons ce mouvement en faisant rouler sur une courbe fixe une courbe liée invariablement à la droite AB.

Nous savons qu'à un instant quelconque le centre instantané de rotation est le point O, intersection des deux droites AO, BO, élevées aux points A et B perpendiculairement à CX et à CY. Le point O ainsi obtenu est le quatrième sommet du rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont CA et CB. La diagonale CO de ce rectangle est égale à l'autre diagonale BA, laquelle est constante par hypothèse. Donc CO est constant, et le lieu des centres instantanés sur le plan est une circonférence DEF décrite du point C comme centre avec un rayon CO égal à la longueur de la droite donnée. Voilà la courbe fixe trouvée.

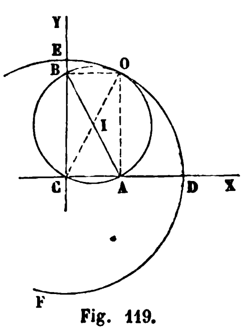


Fig. 119.

Pour obtenir la courbe mobile, observons que le cercle circonscrit au rectangle ACBO est constant de forme, car il a pour diamètre la longueur AB qui est constante; et que ce cercle, ayant son centre au point I, sur le diamètre CO, est tangent au cercle

fixe DEF. Ce cercle OBCA est la seconde courbe cherchée; le mouvement de la droite BA s'obtient en effet en faisant rouler la circonférence OBCA sur la circonférence fixe DEF. Le déplacement élémentaire de la figure qui résulte du roulement du premier cercle sur le second, équivaut au déplacement élémentaire en vertu duquel les extrémités de la droite AB glisseraient sur les droites fixes CX, CY; ces deux déplacements sont en effet deux rotations égales autour d'un même point, à savoir le point O de contact des deux circonférences.

On peut observer que tout point de la circonférence mobile OBCA décrit une droite passant par le point C; que le point I, centre de ce cercle, décrit, autour du point C comme centre, un cercle de diamètre égal à AB; que tout point de la droite mobile AB décrit une ellipse qui a le point C pour centre, et les droites CX, CY, pour directions de ses axes principaux. Enfin, si l'on appelle v la vitesse avec laquelle le point de contact parcourt l'une ou l'autre des courbes OBCA, OEFD, et ω la vitesse angulaire de la courbe mobile au même moment, la formule générale

$$\omega = v\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right)$$

peut s'appliquer, et nous fait connaître la valeur de ω en fonction de v, ou de v en fonction de ω.

On a ici

$$R = CO = AB.$$
$$\rho = OI = \tfrac{1}{2}AB.$$

Nous avons pris R avec le signe — dans l'équation, parce que les courbures des deux circonférences dont l'une roule sur l'autre sont ici dans le même sens, et que les angles de contingence se retranchent au lieu de s'ajouter.

Nous aurons donc

$$\omega = v \times \left(\frac{1}{\frac{1}{2}AB} - \frac{1}{AB}\right) = \frac{v}{AB}.$$

ou bien

$$v = \omega \times AB.$$

Le point de contact se meut par conséquent sur la circonférence ED, avec une vitesse égale à AB $\times\ \omega$, comme il est facile de le reconnaître directement.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE SPHÉRIQUE SUR LA SPHÈRE.

87. Les raisonnements que nous venons de faire au sujet du mouvement d'une figure plane dans son plan, s'appliquent identiquement au mouvement d'une figure sphérique sur la sphère, et sans les répéter ici, nous pouvons poser les théorèmes suivants :

1° Deux positions successives d'une même figure sphérique mobile étant données sur la sphère, on peut amener la figure mobile de l'une à l'autre au moyen d'une rotation unique autour d'un diamètre de la surface.

2° Le mouvement élémentaire d'une figure sphérique mobile sur la sphère est une rotation infiniment petite autour d'un diamètre de la surface. Ce diamètre est appelé *axe instantané* de la rotation, et les points de rencontre de la sphère avec cet axe sont les *pôles instantanés*.

3° Le mouvement continu d'une figure sphérique mobile sur la sphère est une suite de rotations infiniment petites, et peut s'obtenir en faisant rouler une ligne fixée à la figure mobile sur une ligne fixe tracée sur la sphère. En d'autres termes, le mouvement continu d'une figure sphérique mobile sur la sphère est un *mouvement épicycloïdal sphérique*.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE INVARIABLE QUI A UN POINT FIXE.

88. Considérons un solide invariable, mobile autour d'un point fixe O. Coupons ce solide par une surface sphérique S ayant le point O comme centre. Nous obtiendrons pour intersection une certaine figure sphérique A, qui se déplacera à la surface de la sphère S quand elle sera entraînée par le mouvement du solide mobile. Le mouvement élémentaire de la figure A est, en vertu des théorèmes précédents, une rotation infiniment petite autour d'un diamètre de la sphère; donc *le mouvement élémentaire du solide* lié à la figure A *est une rotation infiniment petite autour d'un axe instantané passant par le point* O. Nous savons de plus que le mouvement continu de la figure A sur la sphère S peut s'obtenir en faisant rouler une ligne L, appartenant à la figure A, sur une ligne λ tracée sur la surface de la sphère S. Ce mouvement de la figure A suffit pour définir le mouvement du

solide invariable. Or, nous pouvons considérer les lignes L et λ comme les directrices de deux surfaces coniques ayant le point O pour centre commun ; le roulement de L sur λ équivaudra au roulement du cône (O,L) sur le cône fixe (O,λ), de sorte qu'en définitive *le mouvement continu d'un solide invariable qui a un point O fixe, peut s'obtenir en faisant rouler une surface conique appartenant au solide et ayant pour sommet le point O, sur une seconde surface conique ayant également pour sommet le point O, mais restant fixe dans l'espace*. L'axe instantané de rotation du solide, à un moment donné, est la génératrice de contact OM du cône mobile avec le cône fixe à ce même instant. Les résultats auxquels nous sommes parvenus pour le mouvement dans un plan ou parallèlement à un plan, sont des cas particuliers du mouvement d'un solide ayant un point fixe. La sphère se change en un plan quand son rayon grandit au delà de toute limite; le point O s'éloignant indéfiniment, les cônes (O,L), (O,λ) se changent en des cylindres, et les lignes L et λ sont les sections de ces cylindres par des plans perpendiculaires à leurs génératrices. *Le mouvement continu d'un solide invariable mobile qui se déplace parallèlement à un plan est donc le résultat du roulement d'une surface cylindrique liée au corps sur une surface cylindrique fixe dans l'espace, et les génératrices de ces deux surfaces sont perpendiculaires au plan parallèlement auquel s'effectue le mouvement du solide.*

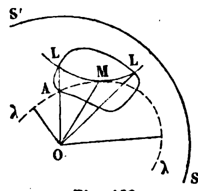


Fig. 120.

MOUVEMENT ÉLÉMENTAIRE D'UN SOLIDE LIBRE DANS L'ESPACE.

89. Supposons enfin qu'un solide invariable soit mobile dans l'espace, mais que son mouvement ne soit assujetti à aucune restriction, et cherchons la manière la plus simple d'en concevoir le mouvement élémentaire.

Soient A, B, C, D,... les positions à un certain moment des divers points du système.

Soient A′, B′, C′, D′,... les positions des mêmes points au bout d'un temps θ très-court.

Le déplacement élémentaire de chacun de ces points est représenté par les droites de jonction AA′, BB′, CC′, DD′, lesquelles seront infiniment petites, et seront égales aux produits des vitesses respectives des points A, B, C, D... par le temps θ.

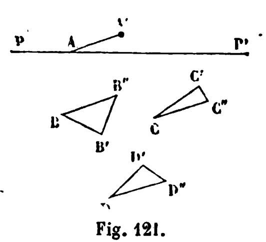


Fig. 121.

Appliquons à tous ces points, moins un, la théorie de la composition des vitesses. Nous pouvons regarder la vitesse du point B, laquelle est proportionnelle à BB′, comme décomposée en deux autres vitesses BB″, B″B′, dont l'une BB″ soit égale et parallèle à la vitesse AA′ du point A. De même, en menant CC″ égal et parallèle à AA′, et joignant C′C″, nous pouvons regarder la vitesse CC′ du point C comme la résultante d'une vitesse égale et parallèle à celle du point A, et d'une seconde vitesse représentée en grandeur et en direction par C″C′. Faisons de même pour le point D et pour tous les autres points du système.

Il en résultera que le mouvement élémentaire du solide peut être décomposé en deux mouvements : 1° L'un, en vertu duquel tous les points du système décrivent dans le temps θ des chemins AA′, BB″, CC″, DD″,... égaux et parallèles; ce premier mouvement est donc un mouvement de *translation;*

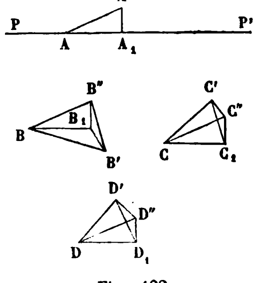


Fig. 122.

2° Le second, en vertu duquel les points B, C, D..., amenés en B″, C″, D″... par le premier mouvement, décrivent les chemins B″B′, C″C′, D″D′... pendant que le point A, parvenu en A′, reste fixe. Ce second mouvement élémentaire est le mouvement d'un solide invariable qui a un point A fixe; c'est donc une *rotation* infiniment petite autour d'un axe instantané PP′ passant par le point A.

Nous avons donc ramené le mouvement élémentaire du solide à deux mouvements simples, une translation et une rotation, et comme nous pouvions faire cette décomposition en partant de

tout autre point que le point A, on voit qu'elle est possible d'une infinité de manières.

Mais on peut, parmi toutes les décompositions possibles, en trouver une qui donne l'image la plus simple du mouvement du solide.

Pour cela, décomposons la translation commune AA′ en deux translations, l'une parallèle à l'axe PP′, l'autre perpendiculaire à cet axe ; il suffit pour cela (fig. 122) d'abaisser du point A′ une perpendiculaire $A'A_1$ sur l'axe PP′, et de regarder la vitesse AA′ comme la résultante des deux vitesses simultanées AA_1, A_1A', puis de substituer de même aux vitesses BB″, CC″, DD″, les vitesses simultanées BB_1 et B_1B'', CC_1 et C_1C'', DD_1 et D_1D''..., respectivement égales et parallèles à AA_1 et A_1A''. De cette manière, pour chaque point B, nous pourrons substituer au contour BB″ B′, formé de deux côtés, le contour $BB_1B''B'$, qui est formé de trois côtés, représentant trois vitesses simultanées.

Or remarquons que deux de ces côtés sont à angle droit sur l'axe PP′, savoir le côté $B''B_1$, qui est parallèle à $A'A_1$, et le côté B″ B′, qui est le chemin infiniment petit décrit par un point du solide en vertu d'une rotation autour de cet axe. Les deux vitesses $B'B_1$ et B″ B′ sont donc perpendiculaires à PP′; par suite leur plan est aussi perpendiculaire à PP′ ; donc, enfin, la vitesse résultante B_1B' de ces deux vitesses prises en particulier est aussi perpendiculaire à PP′, ou parallèle à un plan normal à cette droite. Il en est de même de toutes les vitesses C_1C', D_1D', obtenues en composant la vitesse due à la rotation autour de PP′ avec la vitesse égale et parallèle à A_1A'.

Nous ramenons de cette manière le déplacement élémentaire du solide aux deux mouvements suivants :

1° Une translation, égale à AA_1 et parallèle à PP′;

2° Un mouvement en vertu duquel les divers points A, B, C, D..., reçoivent simultanément des déplacements A_1A', B_1B', C_1C', D_1D', *tous parallèles à un même plan normal à* PP′. Ce mouvement élémentaire est donc *une rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire à ce plan*, c'est-à-dire parallèle à PP′, c'est-à-dire, enfin, *parallèle à la translation.*

On donne à cet axe particulier le nom d'*axe instantané de rotation et de glissement* ou, plus simplement, d'*axe instantané glissant.*

Le mouvement élémentaire d'un solide mobile est donc le ré-

sultat d'une rotation infiniment petite autour d'un certain axe, le long duquel le solide subit en même temps une translation infiniment petite; c'est un mouvement analogue au déplacement infiniment petit que subit une vis mobile dans son écrou, ou, en d'autres termes, *c'est un mouvement hélicoïdal.*

90. Pour trouver l'axe instantané glissant, on peut avoir recours à la construction suivante :

Prenons dans le solide trois points A, B, C, non en ligne droite; le mouvement de ces trois points suffit pour définir le mouvement du solide.

Considérons les vitesses V, V', V'' que possèdent respectivement ces trois points à un moment donné.

On les suppose connues en grandeur et en direction.

Par un point quelconque H de l'espace, menons trois droites H*a*, H*b*, H*c*, égales et parallèles aux vitesses V, V', V'' des points A, B, C. Nous pourrons toujours choisir ces points de manière que leurs vitesses ne soient pas parallèles à un même plan[1]. Les trois points *a*, *b*, *c*, détermineront un plan; du point H abaissons sur ce plan une perpendiculaire HM, et joignons M*a*, M*b*, M*c*. Nous pouvons décomposer la vitesse V = H*a*, en deux vitesses simultanées HM, M*a*; de même la vitesse V' = H*b*, en deux vitesses HM, M*b*; enfin, V'' = H*c*, en deux vitesses HM, M*c*. Nous ramènerons de cette manière les vitesses des trois points A, B, C, à une composante commune HM et à trois autres composantes M*a*, M*b*, M*c*, perpendiculaires à la première, et parallèles à un même plan *abc*, normal à HM. La droite HM sera la vitesse de translation du système mobile parallèlement à l'axe instantané glissant. Nous déterminons par cette construction, la direction de l'axe et la vitesse de la translation. Il reste à trouver la position vraie de l'axe et la

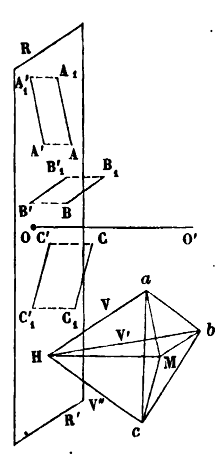


Fig. 123.

[1] Autrement toutes les vitesses des points du système étant parallèles à un plan fixe, le mouvement du corps serait parallèle à ce plan, et au lieu du cas général, on retrouverait un cas déjà examiné.

grandeur de la vitesse angulaire de la rotation. Pour cela, considérons isolément le mouvement de rotation auquel correspondent les vitesses simultanées Ma pour le point A, Mb pour le point B, Mc pour le point C. Menons par le point A une droite AA_1 égale et parallèle à Ma; par le point B une droite BB_1 égale et parallèle à Mb; par le point C une droite CC_1 égale et parallèle à Mc. Puis projetons orthogonalement la figure ainsi construite sur un plan RR′ parallèle au plan abc. Les vitesses AA_1, BB_1, CC_1 se projetteront sur ce plan en vraie grandeur. Supposons ce plan rabattu sur le plan du papier (fig. 124), et soient A′, B′, C′ les projections des points A, B, C, et $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ les projections des vitesses égales et parallèles à Ma, Mb, Mc. Le centre instantané de rotation de la figure projetée s'obtiendra en menant les normales A′O, B′O, C′O aux vitesses $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ des trois points projetés. Ces trois normales se rencontreront en un même point O, qui sera le pied de l'axe instantané glissant : on obtiendra la position vraie de cet axe en menant par ce point O (fig. 123) une droite OO′ perpendiculaire au plan RR′ ou parallèle à HM. La vitesse de rotation du système autour de cet axe sera représentée par l'un des trois rapports égaux :

Fig. 124.

$$\frac{Ma}{OA'} = \frac{Mb}{OB'} = \frac{Mc}{OC'}.$$

Le problème est donc entièrement résolu.

Remarques. La construction que nous venons de faire montre bien que le mouvement élémentaire d'un solide libre dans l'espace ne peut être ramené que d'*une seule manière* à la coexistence d'une translation et d'une rotation autour d'un axe parallèle à la translation. L'axe instantané glissant est celui pour lequel la vitesse de translation est la moindre, car elle est mesurée par la longueur de la perpendiculaire HM, tandis que toute autre décomposition donnerait lieu à une translation HM′, plus grande que HM, et à trois vitesses $M'a$, $M'b$, $M'c$, parallèles au plan abc

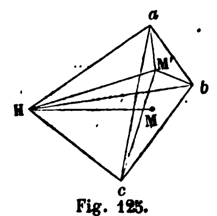


Fig. 125.

et correspondant, par conséquent, à une rotation autour d'une perpendiculaire à ce plan. On peut observer aussi que si, par un point H de l'espace on mène des droites égales et parallèles aux vitesses des divers points d'un système mobile à un moment donné, les extrémités de ces droites seront toutes situées dans un même plan.

MOUVEMENT CONTINU D'UN SOLIDE INVARIABLE DANS L'ESPACE.

91. Le mouvement continu d'un solide invariable est une suite de mouvements élémentaires qu'on peut ramener chacun à une rotation autour d'un certain axe instantané et à une translation le long du même axe. Considérons la surface réglée, lieu des positions successives de l'axe instantané glissant dans l'espace ; considérons de plus les positions successives de l'axe instantané dans le corps solide ; ces positions successives y dessineront une seconde surface réglée appartenant au solide et entraînée dans son mouvement. Le mouvement continu du système sera donc un *roulement* de la surface mobile sur la surface fixe, en vertu duquel la surface mobile viendra appliquer successivement ses génératrices rectilignes sur les génératrices rectilignes de la surface fixe en tournant autour de chacune d'elles ; mais, outre ce roulement, la surface mobile éprouvera le long de chaque génératrice de contact un *glissement* ou *translation*. Nous venons de remarquer que la vitesse correspondante à ce dernier mouvement est moindre que pour toute autre décomposition du mouvement du solide en une translation et une rotation.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES.

92. Nous avons vu (§ 47), que quand un point mobile M est animé à la fois de deux vitesses, MA, MB, la vitesse correspondante au mouvement effectif de ce point est représentée en grandeur et en direction par la diagonale MC du parallélogramme MACB construit sur ces deux vitesses, ou par le troisième côté MC du triangle MAC, dans lequel le côté AC est égal et parallèle à la vitesse MB, et est mené par l'extrémité A de la vitesse MA.

Fig. 126.

Nous nous proposons ici d'étendre aux mouvements simples d'un corps solide cette théorie de la coexistence des mouvements établie d'abord pour un point unique.

Les mouvements simples sont la translation et la rotation. Une translation est donnée quand on en connaît la direction et la vitesse linéaire. Une rotation est connue quand on donne la position vraie de l'axe autour duquel elle s'accomplit, et la vitesse angulaire. Il faut avoir soin d'ailleurs de fixer pour la translation comme pour la rotation le sens dans lequel ces mouvements simples s'opèrent.

Pour la translation, ce sens est indiqué par le sens même de la droite parallèle à la translation; de sorte qu'une droite finie AB, prise dans le sens AB, définit complétement la grandeur, le sens et la direction d'une translation. On saura en effet que cette translation s'opère parallèlement à AB, dans le sens AB, et avec une vitesse égale à AB, de sorte que dans un temps infiniment petit θ le système considéré aura décrit en vertu de ce mouvement le chemin $AB \times \theta$. La droite AB peut d'ailleurs être déplacée comme on voudra dans l'espace pourvu qu'on n'altère ni son parallélisme, ni son sens, ni sa grandeur.

Fig. 127.

On peut représenter de même par une droite finie LM, prise dans un sens particulier LM, la grandeur et le sens d'une rotation. La direction indéfinie LM est l'axe de cette rotation; la position de cette droite doit être alors fixée d'une manière précise. La longueur LM est la mesure de la *vitesse de la rotation;* c'est la longueur de l'arc décrit dans l'unité de temps par un point du corps tournant situé à l'unité de distance de l'axe. On connaît donc par là la position de l'axe et la vitesse angulaire du corps, et il reste à fixer le sens dans lequel le corps tourne. On convient d'attribuer à l'axe LM le sens dans lequel un observateur, couché le long de cet axe, verrait la rotation s'effectuer de gauche à droite, dans le sens du mouvement ordinaire des aiguilles d'une montre. Dire que l'axe a la direction LM, c'est dire que l'observateur devrait avoir les pieds en L et la tête en M; comme il voit toujours le mouve-

Fig. 128.

ment s'opérer de gauche à droite, le sens de la rotation est défini : elle a le sens indiqué par la flèche F.

C'est tout cela que nous entendrons désormais par l'expression *axe d'une rotation;* l'axe sera pour nous une longueur finie, prise sur l'axe géométrique autour duquel tourne un système, égale à la vitesse angulaire de ce système et enfin dirigée dans un sens tel que l'observateur couché le long de cet axe voie le système tourner de gauche à droite.

Cette convention permet d'attribuer des signes aux rotations effectuées autour d'axes rectangulaires coordonnés, OX, OY, OZ. Si la rotation s'effectue autour de OX, le sens de l'axe sera le sens OX lorsque la rotation s'opèrera de Y vers Z; car alors l'observateur, pour la voir s'effectuer de gauche à droite, se couchera les pieds en O, la tête en X ; la direction de l'axe est dans ce cas celle des abscisses positives, et on dira par suite que la *rotation est positive*. Si, au contraire, elle s'effectuait de Z vers Y, le sens de l'axe serait OX′, du côté des abscisses négatives, et la rotation serait dite *négative;* on reconnaîtrait de même facilement qu'avec la direction donnée habituellement aux parties positives des trois axes coordonnés, la rotation est positive autour de l'axe OY, quand elle s'opère de Z vers X, et autour de l'axe OZ, quand elle s'opère de X vers Y.

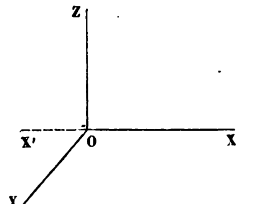


Fig. 129.

Ces préliminaires posés, nous allons chercher les règles de la composition des mouvements simples définis par des droites données de position, de sens et de grandeur. Les cas à examiner successivement sont les suivants :

Composition de deux translations.

Composition de deux rotations.	Autour d'axes parallèles. Autour d'axes concourants. Autour d'axes qui ne se rencontrent pas.
Composition d'une translation et d'une rotation.	Perpendiculaires entre elles. Quelconques.

COMPOSITION DE DEUX TRANSLATIONS.

93. Soient MA, NB, deux translations simultanées, données en grandeur, en direction et en sens.

Pour trouver le mouvement résultant, considérons un point quelconque P du système qui subit ces deux translations. Ce point est animé à la fois de deux vitesses, l'une PQ, égale et parallèle à la vitesse MA de la première translation, l'autre PR égale et parallèle à la vitesse NB de la seconde translation. Ces deux vitesses se composent en une seule PS, diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses PQ, PR. La même construction s'applique à tous les points du système mobile, et la vitesse résultante qu'elle détermine sera pour chacun égale et parallèle à PS. Tous les points sont donc animés de vitesses égales et parallèles; le mouvement du système est par suite une translation, déterminée en grandeur, en direction et en sens, par la droite PS, diagonale du parallélogramme construit sur les deux translations données.

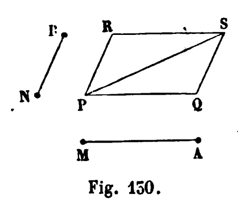


Fig. 130.

De là résulte la règle suivante :

Pour composer deux translations données, on mène par un point quelconque de l'espace deux droites égales et parallèles à ces translations, et on achève le parallélogramme compris sous ces deux droites; la diagonale du parallélogramme est la translation résultante cherchée.

On peut inversement décomposer *d'une infinité de manières* une translation donnée en deux translations simultanées. Il suffit que la translation donnée soit la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés représentent les translations cherchées.

COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS PARALLÈLES.

94. On appelle *rotations parallèles* des rotations dont les axes sont parallèles; on appelle de même *rotations concourantes*, des rotations dont les axes concourent en un même point.

Soit O et O′ les traces sur le plan du papier des axes des deux

rotations données; soit ω la vitesse angulaire de la première; ω' la vitesse angulaire de la seconde; nous supposerons d'abord que les rotations soient de même sens, c'est-à-dire que les axes soient dirigés dans le même sens à partir des points O et O'.

Le système qui subit ces deux rotations simultanées se déplace en vertu de chacune parallèlement au plan du papier; le mouvement résultant consiste donc aussi dans un déplacement parallèle au plan du papier, et par suite, le mouvement résultant est, soit une translation parallèle à ce plan, soit une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Dans ce dernier cas, nous devons trouver dans le plan du papier un point qui reste fixe en vertu de deux rotations simultanées; ce point sera le pied de l'axe cherché.

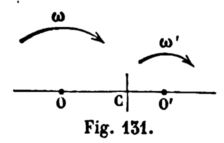


Fig. 131.

Prenons sur la droite OO' un point C quelconque. Ce point, considéré comme subissant seulement la rotation ω, s'abaissera au-dessous de OO' pendant le temps infiniment petit θ, d'une quantité égale à $\omega\theta \times OC$; considéré comme subissant uniquement la rotation ω', il s'élèvera, pendant le même temps de la quantité $\omega'\theta \times O'C$; et par suite, ce point C restera immobile en vertu de la coexistence de deux rotations si l'on a l'égalité

$$\omega\theta \times OC = \omega'\theta \times O'C,$$

ou la proportion

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

On obtient donc un point C fixe dans le mouvement résultant en partageant la distance OO' en deux segments réciproquement proportionnels aux vitesses angulaires ω, ω'. Ce point est le pied de l'axe de la rotation résultante, lequel est perpendiculaire au plan du papier.

Il reste à trouver la grandeur Ω de cette rotation résultante.

On la déterminera en considérant le mouvement du point O' qui coïncide avec l'un des axes. Ce point étant situé sur l'axe O' ne reçoit aucun déplacement par suite de la rotation ω'; son mouvement est donc entièrement dû à la rotation ω, et en vertu de cette rotation, il s'abaisse au-dessous de OO' dans le temps θ d'une quantité égale à $\omega\theta \times OO'$. On substitue aux deux rota-

tions ω et ω' une rotation unique Ω autour de l'axe C; en vertu de ce nouveau mouvement, le point O′ s'abaisse au-dessous de OO′ pendant la durée infiniment petite θ d'une quantité $\Omega\theta \times O'C$. Donc nous avons l'égalité

$$\omega\theta \times OO' = \Omega\theta \times O'C,$$

ou la proportion

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{OO'}{O'C}.$$

Mais nous avons déjà la proportion

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OC}{O'C},$$

et par suite

$$\frac{\omega' + \omega}{\omega} = \frac{OC + O'C}{O'C} = \frac{OO'}{O'C}.$$

Et comparant cette proportion à la première, nous en déduisons

$$\Omega = \omega' + \omega.$$

La rotation résultante est donc la somme des deux rotations composantes; elle est d'ailleurs de même sens que chacune d'elles.

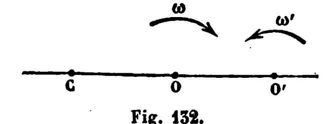


Fig. 132.

95. Supposons en second lieu que les rotations parallèles soient de sens contraires.

Cherchons encore sur la direction OO′ un point C qui reste immobile en vertu de la simultanéité des deux déplacements correspondants à chacune des rotations données. Ce point se trouvera sur le prolongement de OO′, et du côté de la rotation la plus grande; il sera défini par l'égalité

$$\omega\theta \times OC = \omega'\theta \times O'C,$$

ou par la proportion

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Le point C est déterminé par la condition que ses distances aux centres O et O′ soient en raison inverse des rotations correspondantes.

Le mouvement résultant est donc une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du papier et passant par le point C. Appelons Ω la grandeur de cette rotation unique. Nous déterminerons Ω en considérant le mouvement du point O′ ; comme il ne reçoit aucun déplacement de la rotation ω', ses déplacements doivent être les mêmes, qu'on le considère comme entraîné par la rotation ω autour de O, ou par la rotation Ω autour de C. Donc

$$\Omega \times O'C = \omega \times OO',$$

et par suite

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{OO'}{O'C}.$$

Mais

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OC}{O'C},$$

et par suite

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{O'C - OC}{O'C} = \frac{OO'}{O'C}.$$

Donc enfin

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

La rotation résultante est la différence des deux rotations composantes, et elle a le sens de la plus grande.

CAS PARTICULIER DE DEUX ROTATIONS PARALLÈLES, ÉGALES ET CONTRAIRES. COUPLE DE ROTATION.

96. Supposons que les deux rotations ω et ω' soient égales, mais contraires. Les formules précédentes deviennent

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{\omega'}{\omega} = 1$$

et

$$\Omega = \omega - \omega' = 0.$$

La première équation nous indique que le point C est infiniment éloigné; car O′C surpasse OC d'une quantité constante OO′, et pour que le rapport $\frac{OC}{O'C}$ puisse être considéré comme égal à l'unité, il faut et il suffit que la distance OC soit infiniment grande par rapport à la distance constante OO′. La seconde équation nous apprend que ω est nul; de sorte que notre méthode nous conduit à un mouvement résultant qui est *une rotation nulle autour d'un axe infiniment éloigné.*

Nous avons déjà fait pressentir (§ 81) que ce mouvement particulier était l'équivalent d'une translation. Il est facile de vérifier qu'une translation est la résultante de deux rotations simultanées parallèles, égales et contraires.

Prenons un point M quelconque du plan; la rotation ω autour de O imprime à ce point un déplacement MA, perpendiculaire à la droite MO, et égal à $\omega\theta \times MO$. La rotation ω autour de O′ lui imprime un déplacement $MB = \omega\theta \times MO'$, et le déplacement résultant est représenté par la diagonale MN du parallélogramme MANB, construit sur les côtés MA, MB. Le triangle MAN a son côté MA perpendiculaire et proportionnel à MO; le côté $AN = MB$, est perpendiculaire et proportionnel à MO′; l'angle MAN est égal à OMO′; par suite le triangle MAN est semblable à OMO′, et MN, homologue de OO′, lui est proportionnel et normal.

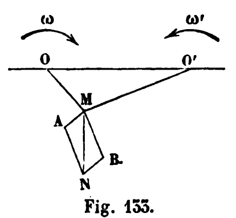


Fig. 133.

Les déplacements résultant des points du système, tous perpendiculaires à une même direction OO′, sont parallèles entre eux. On a de plus la proportion

$$\frac{MN}{OO'} = \frac{MA}{OM} = \omega\theta.$$

Donc

$$MN = \omega\theta \times OO',$$

quantité constante. Les déplacements résultants des points du système sont donc égaux et parallèles, ce qui caractérise le mouvement de translation.

Le rapport $\frac{MN}{\theta}$ est la vitesse linéaire de cette translation. Elle est égale à $\omega \times OO'$, ou au produit de la rotation commune par la distance OO' des deux centres de rotation.

En résumé, *deux rotations parallèles, égales et de sens opposés, se composent en une translation perpendiculaire à la droite qui joint les centres des rotations, et égale au produit de la rotation commune par la distance de ces centres.*

On a donné le nom de *couple de rotation* à l'ensemble de deux rotations égales, parallèles et de sens opposés ; un *couple de rotation* équivaut à une translation ; la mesure de cette translation est le produit de la vitesse angulaire commune aux deux rotations par la distance des centres, qu'on nomme *bras de levier du couple.*

COMPOSITION D'UNE ROTATION ET D'UNE TRANSLATION PERPENDICULAIRE A LA ROTATION.

97. Soit O le pied de l'axe de la rotation ω ; et soit AB la droite, perpendiculaire à cet axe par hypothèse, qui représente en grandeur, en direction et en sens la vitesse v de la translation donnée.

Fig. 134.

Du point O, abaissons une perpendiculaire OD sur la direction AB, et cherchons sur cette droite un point C qui reste immobile en vertu de la coexistence des deux mouvements qu'il subit.

En vertu de la rotation, le point C s'abaisse au-dessous de OD, perpendiculairement à OC, d'une quantité $\omega\theta \times OC$; et en vertu de la translation il s'élève au-dessus, dans une direction perpendiculaire à OC, d'une quantité $v\theta$. Il reste donc immobile si l'on a

$$\omega \times OC = v,$$

ou

$$OC = \frac{v}{\omega}.$$

Le point C est donc l'axe de la rotation résultante.

La grandeur Ω de cette rotation se déduit du déplacement du point O. Ce point, ne subissant que la translation, s'élève au-dessus de OD de la quantité $v\theta$; la rotation Ω autour de C l'élève de $\Omega\theta \times OC$. Donc $\Omega \times OC = v$, et par suite $\Omega = \omega$.

La composition de la translation v avec la rotation perpendiculaire ω, a donc pour seul effet de déplacer l'axe de rotation d'une quantité $OC = \frac{v}{\omega}$, sans altérer ni la grandeur, ni le sens de cet axe.

ω ω' ω'' V O C

Fig. 135.

On pourrait parvenir à ce résultat en employant un *couple de rotation*. En effet, après avoir déterminé le point C sur la droite OD, par l'équation

$$\omega \times OC = v,$$

nous pouvons considérer la translation v comme remplacée par deux rotations simultanées, égales à ω, parallèles, et de sens contraires : l'une ω', ayant lieu autour de l'axe C, l'autre ω'', autour de l'axe O, et contraire à la rotation donnée ω. Nous savon en effet que le couple (ω', ω'') équivaut à la translation $\omega \times OC$, ou v, dans le sens de la flèche. Or les rotations ω et ω'', égales et contraires autour du même axe, se détruisent, et il reste une rotation autour de C, égale et de même sens que la rotation ω.

COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS CONCOURANTES.

98. Soient OA, OB, les deux axes de rotation. Ils représentent, comme on sait, la position de l'axe fixe, la grandeur de la vitesse angulaire, enfin le sens du mouvement. Le point de concours O des deux axes restant fixe dans les deux mouvements composants, reste encore fixe dans le mouvement résultant ; ce mouvement est donc une rotation autour d'un axe passant par le point O.

Construisons le parallélogramme OACB sur les deux axes OA, OB, et menons la diagonale OC. Je dis que cette diagonale représente en direction, en grandeur et en sens, l'axe de la rotation résultante.

Nous commencerons par prouver que l'axe OC reste immobile

par suite des déplacements simultanés dus aux rotations ω autour de OA, et ω' autour de OB. Il suffit pour cela de montrer que le point C reste fixe.

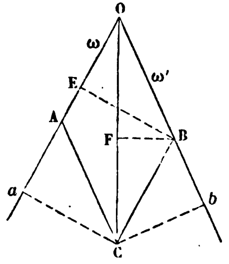


Fig. 136.

Or, en vertu de la rotation ω, le point C se déplace perpendiculairement au plan de la figure, et s'enfonce derrière ce plan d'une quantité égale à $\omega\theta \times Ca$, en appelant Ca la perpendiculaire abaissée du point C sur la direction OA.

En vertu de la rotation ω', le point C se déplace en avant du même plan et perpendiculairement à ce plan, d'une quantité $\omega'\theta \times Cb$, Cb étant la perpendiculaire abaissée du point C sur le côté OB prolongé.

Le point C reste donc immobile si l'on a l'égalité

$$\omega \times Ca = \omega' \times Cb.$$

Mais les vitesses ω et ω' sont représentées sur la figure par les longueurs OA, OB des axes de rotation. L'égalité précédente devient donc

$$OA \times Ca = OB \times Cb,$$

et sous cette forme, on reconnaît qu'elle est satisfaite, car $OA \times Ca$ mesure le double de l'aire du triangle OAC, et $OB \times Cb$ mesure de même le double de l'aire du triangle OBC, qui est égal au triangle OAC.

Le point C restant fixe ainsi que le point O, OC est la direction de l'axe de la rotation résultante.

Appelons Ω la grandeur de cette rotation. Pour la déterminer, considérons le mouvement d'un point quelconque B de l'axe OB; ce point ne subit aucun déplacement en vertu de la rotation ω', puisqu'il est situé sur l'axe de cette rotation. Ses déplacements doivent donc être les mêmes, qu'on les déduise de la rotation ω autour de OA, ou de la rotation Ω autour de OC. Du point B, abaissons sur OA et OC des perpendiculaires OE, OF. En vertu de la rotation OA, le point B se déplace perpendiculairement au plan du papier, en arrière de ce plan, d'une quantité égale à

$\omega\theta \times BE$; en vertu de la rotation OC, il se déplace dans la même direction et, dans le même sens, d'une quantité $\Omega\theta \times BF$ et nous avons l'égalité

$$\omega \times BE = \Omega \times BF.$$

Mais la vitesse ω est représentée sur la figure par la longueur OA de l'axe autour duquel s'effectue la rotation ω. Le produit $\omega \times BE$, ou $OA \times BE$, mesure l'aire du parallélogramme OACB. Le produit $OC \times FB$ mesure le double de l'aire du triangle OCB, c'est-à-dire l'aire du même parallélogramme. Donc

$$OA \times BE = OC \times FB.$$

Or

$$\omega = OA\,;$$

donc

$$\Omega = OC.$$

La rotation résultante de deux rotations concourantes est donc représentée en direction, en grandeur et en sens, par la diagonale OC *du parallélogramme construit sur les axes* OA *et* OB *des deux rotations données.*

COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS NON CONCOURANTES ET NON PARALLÈLES, ET COMPOSITION D'UNE ROTATION AVEC UNE TRANSLATION QUELCONQUE.

99. Soient OA, O′B, les axes de deux rotations qui ne sont ni parallèles, ni concourantes.

Par le point O′, menons une droite O′A′ égale et parallèle à OA, mais dirigée en sens contraire, puis achevons le parallélogramme dont O′A′ est le côté et O′B la diagonale. Il suffira pour cela de joindre BA′, et de mener par les points O′ et B des parallèles O′C, BC, aux côtés BA′, O′A′.

La ligne O′B étant la diagonale du parallélogramme construit sur les deux côtés O′A′, O′C, la rotation O′B est la résultante de deux rotations, O′A′ et O′C ; et nous pouvons substituer à la rotation donnée l'ensemble de ces deux nouvelles rotations.

Mais les deux rotations OA, O'A', sont égales, parallèles et de sens opposés. Donc (§ 96) elles équivalent à une translation, perpendiculaire au plan des parallèles OA, O'A', et égale au produit de la rotation OA par la distance DE des deux parallèles.

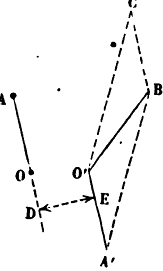


Fig. 137.

Le problème est donc ramené à la composition d'une rotation O'C avec une translation MN donnée (fig. 138).

Nous pouvons décomposer la translation MN en deux composantes MP, MQ, par la règle du parallélogramme, en faisant en sorte que MQ soit parallèle à O'C, et que MP soit perpendiculaire à MQ ou à O'C. Il suffit pour cela de mener par le point M une droite MS indéfinie, parallèle à O'C, et un plan RR', perpendiculaire à O'C; puis par les deux droites MN, MS, de faire passer un plan qui coupera le plan RR' suivant une droite indéfinie ML, laquelle sera la direction de la seconde composante. On achèvera le parallélogramme en menant NP parallèle à MQ, et NQ parallèle à MP ; de cette façon, nous aurons substitué à la translation unique MN deux translations simultanées rectangulaires MP, MQ.

La translation MP étant perpendiculaire à la rotation O'C, peut se composer avec cette rotation (§ 97), et donne pour résultante une rotation O″C', qui n'est autre que la rotation O'C déplacée d'une certaine quantité O'O″, parallèlement à elle-même, sur la perpendiculaire menée du point O' à la vitesse MP. On obtient donc une rotation O″C', et une translation MQ parallèle à la rotation. Le système qui subit à la fois ces deux mouvements élémentaires, *glisse* avec une vitesse MQ le long de l'axe O″C' autour duquel il tourne avec une vitesse angulaire O″C'. Donc enfin (§ 89) la direction O″C' est l'*axe instantané glissant* du système.

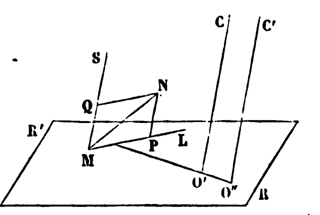


Fig. 138.

100. On pourrait procéder différemment. Substituons (fig. 139) à la rotation OA une rotation O'A', égale et parallèle, rencontrant

l'axe O'B en un point O' quelconque, et une translation perpendiculaire au plan des parallèles OA, O'A, et égale à $\omega \times DE$. Les deux rotations O'A' et O'B sont concourantes : elles se composent donc en une rotation unique O'C, qu'on obtient par la règle du parallélogramme (§ 98). On ramène ainsi les deux rotations à une rotation et une translation : puis on peut continuer comme tout à l'heure. La translation sera décomposée en deux translations rectangulaires, l'une parallèle, l'autre normale à l'axe de la rotation ; et la translation normale, composée avec la rotation, aura pour effet de déplacer l'axe de cette rotation parallèlement à lui-même, sans altérer sa grandeur. En définitive, on obtiendra une rotation et une translation parallèles.

Fig. 139.

APPLICATION DE CETTE THÉORIE AU MOUVEMENT DE LA TERRE DANS L'ESPACE. THÉORIE SOMMAIRE DU PENDULE DE M. FOUCAULT.

101. Le mouvement de la terre dans l'espace fournit un exemple bien connu de la composition des mouvements simultanés. On sait que le globe terrestre parcourt dans l'année une ellipse dont le soleil occupe un des foyers ; ce mouvement représente le mouvement de *translation*. En même temps, le globe terrestre est animé, de l'ouest à l'est, d'un mouvement de *rotation* uniforme autour de la *ligne des pôles* ou de *l'axe du monde*, et la durée de la révolution est de 24 heures. Voilà donc le mouvement de la terre décomposé en deux mouvements simples, la translation et la rotation, et à chacun de ces mouvements correspond une période particulière : à la translation l'*année*, à la rotation le *jour*.

La durée du jour solaire, prise entre deux passages consécutifs du soleil au méridien du même point du globe, est légèrement variable aux différentes époques de l'année, bien que la vitesse de rotation du globe soit constante. Il est facile de se rendre compte de cette inégalité. Soit S le soleil, et T la terre en un point de son orbite LL'. Joignons le centre T de la terre au centre du soleil ; la ligne TS rencontre en A la surface de la terre, de sorte qu'à l'époque que nous considérons, *il est midi pour le point* A.

Fig. 140.

24 heures après, la terre s'est transportée en T′ en vertu de son mouvement de translation. En même temps, le globe a subi une rotation autour de son centre T et a accompli un tour entier ; mais ce tour entier n'a pas ramené le point A dans la direction du soleil, car il est entièrement accompli dès que le point A est arrivé en A″ sur une parallèle T′A″ à TA. L'intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs d'un même point A dans des directions TA, T′A″ parallèles, est nommé *jour sidéral*, parce qu'on peut supposer que ces directions TA, T′A″ aboutissent à une même étoile infiniment éloignée de la terre ; le *jour sidéral*, qui mesure la véritable période du mouvement de rotation uniforme, a une durée rigoureusement constante. Le *jour solaire* est plus long que le jour sidéral de tout le temps que le globe met à décrire le petit angle A″T′A′ ; ce petit déplacement angulaire (pendant lequel le centre T′ de la terre avance d'une certaine quantité sur sa trajectoire) ramène le point A en A′ et complète la durée du jour solaire, intervalle de temps qui s'écoule entre deux *midis* vrais consécutifs en un même point du globe.

La durée du jour solaire est donc variable, car elle dépend de la vitesse de translation de la terre, laquelle n'est pas la même en tous les points de l'orbite, c'est-à-dire pour tous les jours de l'année.

Le *jour moyen*, ou *jour civil*, est la moyenne des jours solaires pendant l'année. C'est une période constante qu'on partage en 24 heures. Il est aisé de trouver le rapport du jour sidéral au jour solaire moyen. La durée de la révolution entière de la terre autour du soleil, c'est-à-dire d'une année, est d'environ 365 jours moyens $\frac{1}{4}$. Or, en un jour moyen, la terre fait autour de son axe un tour entier pour amener le point A en A″, et elle décrit de plus un angle A″T′A′, égal à T′ST ; appelons donc t la durée du jour sidéral rapportée au jour moyen : la valeur moyenne de l'angle T′ST est égale à la fraction $\frac{1}{365\frac{1}{4}}$ du tour entier, et, par suite, le temps que met la terre à décrire cet angle est

$$t \times \frac{1}{365\frac{1}{4}}.$$

Donc

$$t\left(1 + \frac{1}{365\frac{1}{4}}\right) = 24 \text{ heures solaires moyennes} = 86400 \text{ secondes},$$

et enfin

$$t = \frac{86400 \times (365\frac{1}{4})}{366\frac{1}{4}} = 86164 \text{ secondes}.$$

Le jour sidéral est donc plus court que le jour solaire moyen, ce

86400 — 86164 = 236 secondes = 3m 56s, ou d'environ 4 minutes (de jour moyen).

102. La translation annuelle et la rotation diurne sont les principaux mouvements de la terre. Mais ce ne sont pas les seuls. Les astronomes ont découvert que notre globe participe à d'autres mouvements beaucoup plus difficiles à étudier. Nous avons admis jusqu'ici que l'axe de la terre se déplaçait dans l'espace parallèlement à lui-même. Ce n'est pas le mouvement le plus général d'un corps solide dans l'espace. Nous avons décomposé le mouvement de la terre en une translation et une rotation autour d'un axe passant par son centre. Faisant abstraction du premier mouvement, le second, qui s'accomplit autour d'un même point fixe, peut consister dans une série de rotations instantanées autour d'axes successifs passant par ce point, et nous avons vu (§ 88) que ce mouvement continu de rotation équivalait au roulement d'un cône lié au corps mobile, sur la surface d'un second cône fixe dans l'espace. La translation parallèle de l'axe de rotation n'étant pas le mouvement le plus général d'un corps libre, il est probable que la terre est animée d'un mouvement plus compliqué.

On constate, en effet, que l'axe de la terre n'est ni rigoureusement fixe dans le globe, ni rigoureusement parallèle à une direction fixe dans l'espace. Hipparque a démontré le premier que l'axe de la terre décrit en 26000 années un cône droit autour d'une perpendiculaire au plan de l'écliptique : ce mouvement extrêmement lent déplace d'environ 50 secondes sexagésimales par an la ligne d'intersection de l'écliptique avec l'équateur; il est connu en astronomie sous le nom de *précession des équinoxes*. Bradley a reconnu plus tard que l'axe de la terre ne suit pas rigoureusement la surface du cône droit indiqué par Hipparque, mais qu'il oscille de quelques secondes de part et d'autre de cette surface dans une période de 18 années environ : c'est ce mouvement qu'on appelle la *nutation*. On rend compte de ces mouvements en imaginant un cône très-peu ouvert, ayant son sommet au centre même de la terre et faisant corps avec elle, puis un second cône ayant même sommet, mais fixe dans l'espace; on supposera ensuite que le premier cône roule sur le second de manière à faire chaque jour un tour entier. Lorsqu'on néglige la nutation, balancement très-restreint de l'axe de part et d'autre d'une position moyenne, et lorsqu'on se borne au mouvement moyen de précession, on peut représenter le mouvement ainsi simplifié en prenant pour cône mobile et pour cône fixe deux cônes de révolution. Le pôle réel du globe, au lieu d'être un point rigoureusement fixe sur la surface de la terre, est un point mobile qui, dans cette hypothèse, décrirait chaque jour autour du pôle moyen un cercle d'environ 25 centimètres de rayon.

103. *Pendule de M. Foucault.* La décomposition des rotations permet de donner une explication sommaire du mouvement apparent observé dans l'expérience de M. Foucault.

On attache à un point A très-élevé un fil AB d'une grande longueur ; à l'extrémité B on suspend une lentille pesante. On écarte le pendule ainsi formé de la position verticale AC, puis on le laisse osciller de AB en AB′. Quand l'expérience est faite avec toutes les précautions convenables, on ne tarde pas à remarquer que le plan d'oscillation du pendule prend, par rapport aux objets fixes environnants, un mouvement à peu près uniforme autour de la verticale, dans le sens du mouvement apparent du soleil, comme si ce plan ne subissait pas le mouvement d'entraînement qui correspond à la rotation de la terre.

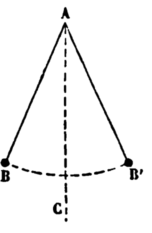


Fig. 141.

Voici comment on peut s'expliquer ce phénomène.

Soit (fig. 142) PEP′E′ la sphère terrestre, O son centre, PP′ la ligne des pôles ou l'axe de la surface, qui conserve dans l'espace une direction sensiblement fixe, EE′ le plan de l'équateur.

Suspendons d'abord le pendule au point A, sur la verticale du pôle nord, écartons la lentille B de la verticale, et laissons osciller le pendule. Rigoureusement, l'oscillation ne s'effectuerait pas dans le plan vertical PAB, parce qu'en écartant la lentille, la main de l'observateur lui communique au point B, perpendiculairement à ce plan, la vitesse qu'elle possède elle-même en ce point, et qui est le produit de la distance BP du point à l'axe de la terre, par la vitesse angulaire du globe. Mais cette vitesse est très-faible, parce que la distance BP est très-petite, et nous admettrons qu'on peut n'en pas tenir compte, ou, plus rigoureusement, qu'on a eu soin de la détruire, en imprimant à la lentille, au moment où on l'abandonne, une vitesse égale et contraire. Alors le mouvement s'accomplit dans le plan PAB. On sait, par une expérience préalable, que la torsion du fil AB ne déplace pas le plan d'oscillation. La pesanteur ne contribue pas, d'ailleurs, à modifier la position de ce plan. Il restera donc fixe dans l'espace, et comme le globe fait en 24 heures un tour entier de l'ouest à l'est autour de l'axe PA, l'observateur, entraîné dans ce mouvement, attribuera au plan d'oscillation du pendule un mouvement de rotation de l'est à l'ouest, égal et contraire

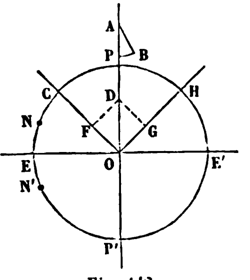


Fig. 142.

au mouvement dont il est lui-même animé ; le plan du pendule, pour l'observateur placé les pieds en P, la tête en A, tournera donc de gauche à droite dans le sens de la marche apparente du soleil.

On reconnaîtrait de même que, si l'observation se faisait au pôle sud, le plan du pendule paraîtrait tourner de droite à gauche autour de P'P, car l'observateur aurait, au point P', la position inverse de celle qu'il a en P.

On peut donc prévoir qu'en un point pris au hasard à la surface de la terre, le plan du pendule prendra un certain mouvement apparent ; mais quelle relation ce mouvement apparent aura-t-il avec le mouvement de rotation de la terre ?

Pour résoudre cette question, remarquons d'abord que si l'on fait l'expérience en deux points N et N', également distants de l'équateur EE', l'un dans l'hémisphère boréal, l'autre dans l'hémisphère austral, on verra le plan du pendule tourner en N, autour de la verticale, dans le sens *Est-Sud-Ouest-Nord*, tandis qu'en N' il tournera autour de la verticale du lieu, dans le sens *Est-Nord-Ouest-Sud*. A l'équateur, par conséquent, le plan du pendule restera immobile, car l'équateur est la limite commune des deux régions où les mouvements observés sont contraires.

Nous avons ainsi reconnu les lois du mouvement apparent au pôle et à l'équateur : au pôle, rotation qui fait accomplir au plan du pendule, de l'est à l'ouest, un tour entier de l'horizon en 24 heures ; à l'équateur, immobilité apparente de ce plan. Il reste à savoir ce qui se passe en un point C, intermédiaire entre le pôle P et l'équateur.

Joignons OC, et élevons sur OC une perpendiculaire OH ; puis prenons sur l'axe OP une longueur OD pour représenter la vitesse de rotation du globe. Décomposons cette rotation en deux autres, autour des axes OC, OH ; pour cela il suffit de projeter le point D en F et en G sur les droites rectangulaires OC et OH. Les longueurs OF et OG représenteront, à la même échelle, les vitesses de rotation composantes.

Considérons successivement ces deux rotations. A l'égard de la rotation OG, le point C se trouve comme à l'équateur de la sphère dont le point H est le pôle. Si cette rotation existait seule, nous savons qu'elle ne produirait aucun déplacement apparent du plan d'oscillation du pendule, et par suite nous n'avons pas à tenir compte de la composante OG.

A l'égard de la rotation OF, le point C est situé au pôle qu'aurait le globe si cette rotation existait seule ; par conséquent le plan d'oscillation du pendule prendra, par rapport à l'observateur qui fait en C l'expérience, un mouvement de rotation autour de la verticale du lieu, de

l'est à l'ouest en passant par le sud, et avec une vitesse angulaire égale à la fraction $\frac{OF}{OD}$ de la vitesse angulaire du globe. Puisque le globe fait un tour entier en 24 heures, le plan du pendule fera au point C le tour entier de la verticale dans un temps égal à 24 heures $\times \frac{OD}{OF}$, c'est-à-dire dans un temps de plus en plus long à mesure que le point C se rapproche de l'équateur ; la durée du tour devient infinie quand le point C est sur l'équateur même, parce qu'alors OF est nul, ce qui confirme ce que nous avions reconnu déjà.

A la latitude du 45°, OD est égal à OF $\sqrt{2}$, ou à OF $\times$ 1,41. Donc la durée du tour entier serait, à cette latitude, de

$$24 \text{ heures} \times 1,41,$$

ou de 33 heures 50 minutes.

Cette célèbre expérience rend sensible pour ainsi dire le mouvement de rotation de la terre.

APPLICATION AU MOUVEMENT RELATIF.

104. Si deux systèmes invariables sont tous deux en mouvement, et qu'on propose de trouver le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre, nous savons qu'on peut par la pensée imprimer aux deux systèmes un même mouvement commun, qui n'altérera en rien le mouvement relatif cherché ; prenons pour ce mouvement additionnel un mouvement égal et contraire au mouvement absolu dont le second système est animé ; le second système sera ramené au repos, et le mouvement résultant que possédera le premier système sera le mouvement relatif demandé.

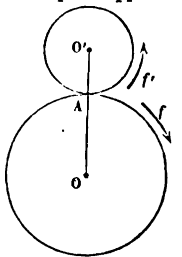


Fig. 143.

Supposons par exemple que deux cercles OA et O'A, tangents au point A, soient animés chacun d'un mouvement de rotation autour de son centre, le premier dans le sens de la flèche f, et le second dans le sens de la flèche f', de manière que les *vitesses linéaires* des points des deux circonférences soient égales. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans les engrenages. On demande le mouvement du système O' par rapport au système O.

Appelons v la vitesse linéaire commune aux deux circonférences ; la

vitesse angulaire de la rotation qui s'effectue autour de l'axe O sera égale à $\frac{v}{R}$, en appelant R le rayon OA du premier cercle ; la vitesse angulaire du second cercle autour de O' sera de même $\frac{v}{R'}$, en appelant R' le rayon O'A. Imprimons à l'ensemble des deux systèmes un mouvement égal et contraire au mouvement propre du système O. De cette manière, le système O restera en repos, et le système O' prendra un mouvement composé qui sera le mouvement cherché.

Nous sommes donc amenés à composer la rotation $\frac{v}{R'}$ autour de l'axe O', mouvement propre du cercle O'A, avec une rotation égale et contraire à $\frac{v}{R}$, autour de l'axe O. Ces deux rotations sont parallèles et de même sens ; elles se composent donc (§ 94) en une seule, parallèle, de même sens, et égale à leur somme $\frac{v}{R} + \frac{v}{R'}$, et l'axe de la rotation résultante partage la distance OO' des axes des rotations composantes dans le rapport inverse des vitesses angulaires, c'est-à-dire dans le rapport

$$\frac{\left(\frac{v}{R}\right)}{\left(\frac{v}{R'}\right)} = \frac{R'}{R} = \frac{O'A}{OA}.$$

Cet axe passe donc au point de contact A des deux cercles : la circonférence O'A *roule sans glisser* sur le cercle OA ; le mouvement relatif du cercle O' par rapport au cercle O est donc un roulement uniforme du premier cercle sur le second, et la vitesse angulaire de la circonférence mobile autour de son point de contact avec la circonférence fixe est égale à

$$v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

formule que nous avions déjà établie d'une manière générale (§ 85) pour le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe, en appelant v la vitesse linéaire du point géométrique de contact des deux courbes.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT RELATIF.

105. La *vitesse absolue* d'un point dont le mouvement est rapporté à des axes mobiles est, comme nous l'avons vu (§ 44), la résultante de la *vitesse relative* du point par rapport aux axes, et de la *vitesse d'entraînement* qu'aurait le point supposé lié aux axes pendant un instant infiniment court; cette décomposition est toujours vraie, quel que soit le mouvement d'entraînement.

Il n'en est pas de même de l'accélération, et sauf certains cas particuliers que nous étudierons en détail, il n'est pas vrai de dire que l'accélération totale du mouvement absolu d'un point mobile soit la résultante de deux accélérations, dont l'une correspond au mouvement relatif, l'autre au mouvement du point lié aux axes mobiles et entraîné par eux ; pour trouver l'accélération totale du mouvement absolu, il faut composer ensemble trois accélérations, savoir, les deux accélérations qui viennent d'être indiquées, et une troisième accélération, dite complémentaire, que nous allons définir, et qui dépend de la nature du mouvement d'entraînement.

Les axes mobiles forment un système invariable, et par suite (§ 89) le déplacement élémentaire qu'ils subissent peut être décomposé d'une infinité de manières en une translation et une rotation. Mais à un certain moment le point mobile M coïncide avec un point géométrique A du système de comparaison, et le mouvement d'entraînement fait passer ce point géométrique de A en A'; par suite, le mouvement élémentaire d'entraînement du système invariable de comparaison est décomposable en une translation AA', et une rotation autour d'un axe instantanée PP', qu'on peut regarder comme passant par le point A' (fig. 144).

Le mouvement d'entraînement du point A, lié aux axes mobiles, fait décrire à ce point une certaine trajectoire AC; au bout d'un temps infiniment petit θ après le passage du point M en A, le point A est parvenu en A'. Menons en A la tangente AB à la trajectoire AC, et prenons $AB = v_e \theta$, en appelant v_e la vitesse d'entraînement. Joignons BA'; nous savons (§ 60) que BA' est égal à

$$\tfrac{1}{2} j_e \theta^2,$$

j_e étant l'accélération totale d'entraînement.

Pendant ce temps, le point mobile M, qui était en A à l'origine du emps θ, est parvenu en M' sur sa *trajectoire relative* AD. Et si l'ont désigne par v_r et j_r la vitesse et l'accélération du mouvement relatif, nous

prendrons sur la tangente à la trajectoire relative une longueur $AN = v_r\theta$, nous joindrons NM', et nous aurons $NM' = \frac{1}{2} j_r \theta^2$. Nous trouvons donc sur la figure la vitesse et l'accélération d'entraînement, la vitesse et l'accélération relatives. Il reste à trouver la vitesse et l'accélération absolues.

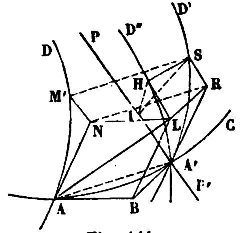


Fig. 144.

La trajectoire relative AD subit le mouvement d'entraînement; elle se transporte donc pendant le temps θ de AD dans la position A' D"; mais ce mouvement peut être décomposé en deux autres : un mouvement de translation, parallèle à AA', qui amènera la trajectoire relative de la position AD à la position A' D'; et un mouvement de rotation autour de l'axe PP', qui la fera passer de la position A'D' à la position A'D", en faisant décrire à chaque point S de la trajectoire un arc de cercle infiniment petit SH, ayant son centre quelque part en I sur l'axe PP'. Si nous prenons A'H = A' S = AM', le point H sera la position absolue du point mobile M au bout du temps θ; le point S serait la position vraie du mobile M au bout de ce temps si la rotation autour de l'axe PP' n'existait pas.

Achevons le parallélogramme NABL; les côtés AN, AB, étant respectivement égaux à $v_r\theta$ et $v^e\theta$, la diagonale AL, résultante de ces deux déplacements, sera égale à Vθ, V désignant la vitesse absolue du mobile M'. Joignant donc LH, et appelant j l'accélération totale du mouvement absolu, nous aurons $LH = \frac{1}{2} j\theta^2$.

La droite M' S est égale et parallèle à la droite AA'; sur les droites M' S et M' N, construisons un parallélogramme M'NRS; nous aurons RS = M'N, et NR sera égal et parallèle à AA'.

Joignons enfin RA' et RL; la figure SRA' n'est autre chose que la figure M' NA transportée parallèlement à elle-même d'une quantité égale à AA'. Donc RA' est égal et parallèle à AN, et par suite à BL; donc LBA' R est un parallélogramme, et LR est égal et parallèle à BA'. Le contour polygonal LRSH se compose de trois côtés, dont les deux premiers LR, RS, sont respectivement égaux et parallèles à BA' et à NM', c'est-à-dire aux lignes qui représentent en direction et en grandeur, au facteur $\frac{1}{2}\theta^2$ près, l'accélération totale dans le mouvement d'entraînement et dans le mouvement relatif. Le troisième côté SH est un élément de circonférence, normal au plan HA' P conduit par la trajectoire relative et l'axe instantané; et il a pour longueur $IH \times \omega\theta$, en appelant ω la vitesse angulaire du système de comparaison autour de l'axe PP'; l'élément IH peut être regardé comme la projection de A'H sur un plan perpendiculaire à PP', et l'élément A'H, espace décrit par le point mobile pendant le temps θ sur sa

trajectoire relative, est à la limite égal au produit $v_r\,\theta$. Appelons v_r' la vitesse relative projetée sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation PP′, nous aurons :

$$SH = v_r'\,\theta \times \omega\theta = v'_r\,\omega\theta^2.$$

Le côté LH qui ferme le contour, est égal au produit $\frac{1}{2} j\theta^2$, j étant l'accélération totale du mouvement absolu. Divisons par $\frac{1}{2}\,\theta^2$ les quatre côtés du quadrilatère LRSH; cela revient à y substituer une figure semblable, dont les côtés (fig. 145) seront j, j_e, j_r, et $\dfrac{v'_r\,\omega\theta^2}{\frac{1}{2}\,\theta^2} = 2v'_r\,\omega$. Le côté L′H′ est la résultante des côtés L′R′, R′S′, S′H′, chacun étant pris dans le sens indiqué par les flèches (§ 37). Par conséquent *l'accélération j du mouvement absolu est la résultante de trois accélérations, savoir : l'accélération j_e du mouvement d'entraînement, l'accélération j_r du mouvement relatif, et l'accélération $j_c = 2v'_r\omega$, qui est perpendiculaire à la fois à la vitesse relative et à l'axe instantané de rotation, et dirigée dans le sens* SH (fig. 144), *c'est-à-dire dans le sens où la rotation instantanée tend à faire tourner l'extrémité* S *d'une aiguille* A′S *dirigée dans le sens de la vitesse relative.*

Fig. 145.

Cette accélération complémentaire j_c, appelée aussi *accélération centrifuge composée*, est nulle lorsque $\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque l'entraînement se réduit à une simple translation, ou lorsque $v'_r = 0$, c'est-à-dire lorsque la vitesse relative est nulle ou dirigée suivant l'axe instantané de rotation. Dans ces divers cas particuliers, l'accélération absolue est la résultante de deux accélérations seulement, celle du mouvement relatif et celle du mouvement d'entraînement. Dans tout autre cas, il faut joindre à ces deux accélérations l'accélération complémentaire ou centrifuge composée. Tel est le théorème sur l'accélération dans le mouvement relatif; on lui donne le nom de *théorème de Coriolis.*

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE CORIOLIS.

106. L'accélération j du mouvement absolu étant la résultante des trois accélérations j_r, j_e, et j_c, on peut dire aussi que l'accélération j_r du mouvement relatif est la résultante de trois accélérations, savoir l'accélération j du mouvement absolu, et les accélérations j_e et j_c changées de

sens. Pour trouver l'accélération du mouvement relatif d'un point, connaissant l'accélération du mouvement absolu, il suffira donc de composer cette accélération avec l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et avec l'accélération centrifuge composée, également changée de sens.

On sait déjà que l'accélération complémentaire j_c est nulle lorsque le mouvement d'entraînement est une translation, parce qu'alors $\omega = 0$. Lorsque le mouvement d'entraînement est rectiligne et uniforme, $j_e = 0$ et alors j_r ne diffère pas de j; l'accélération absolue est identique à l'accélération relative, bien que la vitesse relative diffère de la vitesse absolue.

Cette remarque permet de résoudre très-simplement certains problèmes. Prenons pour exemple la recherche de l'accélération totale du mouvement d'un point appartenant à un cercle qui roule uniformément sur une droite fixe, et pour simplifier, supposons que ce point soit situé sur la circonférence du cercle mobile. Soit O le centre, OA le rayon du cercle et LL′ la droite fixe; soit B le point dont on demande l'accélération totale. Nous savons (§ 83) que le roulement du cercle sur la droite consiste dans une rotation instantanée autour du point A; la vitesse de cette rotation, ω, est supposée constante. Nous pouvons regarder cette rotation ω autour du point A comme la résultante d'une rotation égale et de même sens autour du point O, et d'une translation parallèle à LL′ et égale à $\omega \times OA$. Au lieu de considérer le mouvement absolu du cercle, nous regarderons ce mouvement comme composé de deux mouvements simples, l'un de rotation autour du centre O, avec une vitesse angulaire constante ω, et l'autre de translation parallèlement à LL′, avec une vitesse linéaire constante, $\omega \times OA$.

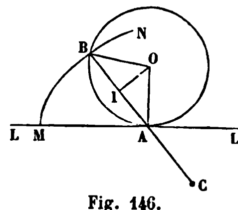


Fig. 146.

Prenons le premier de ces mouvements pour mouvement relatif : le second sera le mouvement d'entraînement, et comme il est rectiligne et uniforme, l'accélération du mouvement relatif ne différera pas de l'accélération du mouvement absolu. Or on connaît l'accélération dans le mouvement circulaire uniforme (§ 61); elle est dirigée du point mobile B vers le centre O, et est égale au carré de la vitesse linéaire du point divisé par le rayon, ou à

$$\frac{\omega^2 \times \overline{OB}^2}{OB} = \omega^2 \times OB.$$

Telle est l'accélération cherchée. Elle est constante en grandeur, et constamment dirigée vers le centre O du cercle mobile.

107. Il est facile d'en déduire le rayon de courbure de la cycloïde MN décrite par le point B. On sait que l'accélération totale est la résultante de deux accélérations, l'une tangentielle, l'autre normale à la trajectoire, et que cette dernière accélération est égale au carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure (§ 63). La normale à la trajectoire du point B est la droite AB, qui joint le point B au centre instantané de rotation A, et par suite la vitesse du point B est égale à $\omega \times AB$. Le carré de la vitesse est donc $\omega^2 \times AB^2$, et par suite $\frac{\omega^2 \times AB^2}{\rho}$ est la composante normale de l'accélération totale.

Mais l'accélération totale est dirigée suivant BO et égale à $\omega^2 \times OB$; projetons cette accélération sur la direction de la normale BA. La droite OB projetée sur BA donne le segment BI, moitié de AB. La composante normale de l'accélération est donc égale à $\omega^2 \times BI$, ou à $\frac{\omega^2}{2} \times AB$, et par suite on a l'égalité,

$$\frac{\omega^2}{2} \times AB = \omega^2 \times \frac{\overline{AB}^2}{\rho},$$

ou bien

$$\rho = 2AB.$$

Dans la cycloïde, le rayon de courbure BC, *en un point donné* B *de la courbe, est donc double de la normale* BA *en ce point.*

108. *Problème.*—Vérifier le théorème de Coriolis dans le mouvement apparent d'un point fixe F, rapporté à deux axes mobiles OX, OY tracés dans son plan et animés d'un mouvement uniforme de rotation autour de leur intersection commune O.

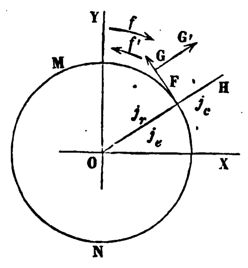


Fig. 147.

On donne la vitesse angulaire ω de la rotation des axes autour de l'origine O; la distance OF reste constante; nous la représenterons par R. La rotation des axes s'opérant dans le sens de la flèche f avec la vitesse ω, le point F qui en réalité reste fixe, aura, par rapport aux axes, un mouvement apparent, qui sera une rotation égale et contraire; il semblera donc décrire uniformément la circonférence du cercle FMN, qui a le point O pour centre et $R = OF$ pour rayon, et sa vitesse linéaire sera constante et égale à $OF \times \omega$. Le sens du mouvement apparent ou relatif est le sens de la flèche f'.

L'accélération du mouvement absolu du point F est nulle puisque le

point reste fixe. Nous devons donc trouver une résultante nulle en composant les trois accélérations j_r, j_e, j_c. Nous allons déterminer ces trois accélérations en direction et en grandeur.

L'accélération j_r est dirigée suivant FO, et elle est égale à

$$\omega^2 \times OF.$$

L'accélération j_e s'obtient en considérant le mouvement du point F supposé lié aux axes mobiles ; le point F entraîné par les axes décrirait uniformément la circonférence FNM dans le sens de la flèche *f*, avec une vitesse $\omega \times OF$; donc l'accélération j_e est encore dirigée de F vers O et elle est égale aussi à $\omega^2 \times OF$.

Les deux accélérations j_r et j_e sont donc toutes deux dirigées suivant la même droite FO, et elles se composent en s'ajoutant, ce qui donne $2\omega^2 \times OF$ pour somme de ces deux premières composantes.

Cherchons enfin l'accélération j_c.

Nous savons qu'elle est normale à la fois à la vitesse relative, laquelle est dirigée suivant la tangente FG et à l'axe de rotation projeté en O ; elle a donc pour direction la droite FO, qui est normale à la fois à ces deux droites. De plus, nous savons qu'elle a pour sens le sens dans lequel la rotation instantanée (qu'on peut supposer transportée parallèlement à elle-même au point F) tend à déplacer l'extrémité G de la vitesse relative ; c'est ici le sens GG′, et, par suite, le sens de l'accélération complémentaire est FH.

Nous savons enfin qu'elle a pour grandeur $2v'_r\,\omega$. Ici v'_r, projection de la vitesse relative sur un plan normal à l'axe, n'est autre que la vitesse relative elle-même, qui est égale à $\omega \times OF$; enfin, $j_c = 2\,\omega^2 \times OF$.

La troisième accélération est donc dirigée en sens contraire des deux premières, suivant la même droite, et elle es égale à leur somme ; la résultante des trois accélérations, $j_r + j_e - j_c$, est égale à zéro et le théorème est ainsi vérifié.

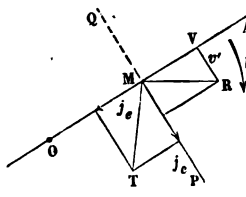


Fig. 148.

109. *Problème.*— Trouver l'accélération j du mouvement absolu d'un point M, qui glisse avec une vitesse linéaire constante v le long d'une droite OA, laquelle est animée, autour d'un axe projeté en O, d'une vitesse angulaire ω dans le sens de la flèche *f*. On suppose la vitesse v dirigée dans le sens OA (fig. 148).

Nous considérerons le glissement uniforme du point M sur la droite OA comme un mouvement relatif, et le mouvement de rotation de la

droite OA autour de l'axe O sera le mouvement d'entraînement; la vitesse v est donc la vitesse relative.

Cherchons les trois composantes j_r, j_c et j_e, dont la résultante est l'accélération cherchée j.

L'accélération j_r est nulle, car le mouvement relatif est, par hypothèse, rectiligne et uniforme.

L'accélération j_e est celle qu'aurait le point M s'il était entraîné par les axes mobiles, et comme la vitesse de rotation ω est constante, le point M décrirait uniformément autour du point O une circonférence de rayon OM avec une vitesse linéaire $\omega \times$ OM; donc, l'accélération j_e est dirigée suivant MO et égale à $\omega^2 \times$ OM.

L'accélération complémentaire est perpendiculaire à l'axe O et à la vitesse relative, laquelle est dirigée suivant OA; elle coïncide donc en direction avec la droite PQ, menée par le point M dans le plan de la figure perpendiculairement à OA. Pour déterminer son sens, considérons l'extrémité d'une aiguille MV, dirigée dans le sens de la vitesse relative; la rotation ω, transportée parallèlement à elle-même en M, ferait décrire à l'extrémité de l'aiguille MV un arc Vv', dont le sens indique le sens de l'accélération j_c; cette accélération est donc dirigée suivant MP. Elle est d'ailleurs égale à $2\, v'_r \omega$ ou, dans ce cas particulier, à $2\, v\omega$.

Ayant donc pris deux longueurs respectivement égales à $\omega^2 \times$ OM et à $2v\omega$, sur les directions MO et MP, on aura l'accélération totale du mouvement absolu en construisant la diagonale MT du rectangle formé sur ces deux longueurs.

La vitesse absolue du point M s'obtiendrait de la même manière en composant la vitesse v, dirigée suivant MA, avec la vitesse d'entraînement, égale à $\omega \times$ OM, et dirigée suivant MP; elle serait représentée par la diagonale MR du rectangle formé sur ces deux droites.

110. *Remarque sur les mouvements observés à la surface de la terre.* — Les mouvements que nous observons à la surface de la terre sont rapportés à des objets placés sur cette surface, et que nous regardons comme fixes, tandis qu'en réalité ils sont entraînés avec notre planète. Ce sont donc des mouvements apparents, et l'observation directe ne nous révèle, par conséquent, que des vitesses relatives et que des accélérations relatives. Pour passer de là aux vitesses absolues et aux accélérations absolues, il faut les composer avec les vitesses d'entraînement, avec les accélérations d'entraînement et les accélérations complémentaires. Le mouvement de translation de la terre et son mouvement de rotation peuvent d'ailleurs être considérés successivement et indépendamment l'un de l'autre, sauf à composer ultérieurement les résultats correspondants à chacun d'eux. Si l'on se borne à considérer le mouvement de rotation

diurne de la terre autour de la ligne des pôles PP′, on reconnaîtra qu'à l'accélération observée j_r, qui est celle du mouvement apparent d'un point M, il faut ajouter d'abord l'accélération d'entraînement j_e du même point, laquelle est due au mouvement uniforme du point M autour de l'axe PP′; elle est par suite égale à $\omega^2 \times MN$ et est dirigée dans le sens MN; puis l'accélération j_c, perpendiculaire à la fois à la trajectoire relative et à l'axe PP′, et égale à $2 v'_r \omega$, v'_r étant la projection orthogonale de la vitesse observée sur un plan perpendiculaire à l'axe PP′. Si, par exemple, l'observation a lieu en un point de l'équateur EE′ et que le point mobile suive un des méridiens, on aura $v'_r = 0$ et la troisième accélération sera nulle.

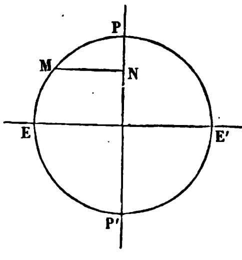


Fig. 149.

Si le mouvement observé est très-lent, v_r est très-petit et l'accélération j_c est négligeable. Mais pour les mouvements rapides, on commettrait quelquefois une grande erreur en ne tenant pas compte de l'accélération j_c [1].

APPENDICE AU CHAPITRE V

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS L'ESPACE.

111. Prenons arbitrairement sur la figure plane mobile trois points A, B, C, non en ligne droite, et considérons chacun de ces trois points dans les deux positions infiniment voisines A et A′, B et B′, C et C′, qu'ils occupent sur leurs trajectoires. La position de ces trois points, à un instant donné, définit entièrement la position de la figure au même instant.

Le triangle ABC se transporte donc en A′B′C′ sans changer de forme

[1] On trouvera dans le supplément placé à la suite du chapitre VI la décomposition de l'accélération j_c suivant trois axes rectangulaires.

ni de dimensions; la seconde position A′B′C′ n'est pas supposée dans le plan P de la première. Projetons A′B′C′ sur le plan P, en abaissant des points A′, B′, C′, des perpendiculaires A′*a*, B′*b*, C′*c*, sur ce plan, puis joignons A*a*, B*b*, C*c*, *ab*, *bc*, *ca*. Les côtés *ab*, *bc*, *ca*, du triangle projeté, sont égaux aux côtés A′B′, B′C′, C′A′, du triangle situé en dehors du plan P, à des infiniment petits du second ordre près (§ 8) On peut donc admettre que *ab* = A′B′, *bc* = B′C′, *ca* = C′A′ et, par suite, *ab* = AB, *bc* = BC, *ca* = CA. Les trois triangles ABC, A′B′C′, *abc* sont donc trois positions d'un seul et même triangle. Or les déplacements réels AA′, BB′, CC′, peuvent être décomposés chacun en deux déplacements, savoir A*a*, B*b*, C*c*, qui sont situés dans le plan P, et *a*A′, *b*B′, *c*C′, qui sont normaux à ce plan. Au lieu de faire passer le triangle ABC de sa première position à sa seconde, nous imaginerons donc qu'on lui fasse occuper d'abord la position intermédiaire *abc* par un déplacement dans le plan P, puis qu'on lui imprime un déplacement normal à ce plan. Le premier déplacement s'opérera par une rotation unique autour d'un centre instantané O, situé dans le plan P, ou plutôt autour d'un axe instantané OO′ élevé normalement à ce plan par le point O où se rencontrent les normales AO, BO, CO, menées dans le plan aux éléments A*a*, B*b*, C*c*. Le second déplacement s'opérera par une rotation du plan de la figure autour d'une droite LL′, intersection du plan P avec le plan du triangle dans sa seconde position A′B′C′. Car, dans ce mouvement, chaque point de la figure mobile décrit un arc infiniment petit normal au plan P et proportionnel à sa distance à l'axe LL′. Ces deux rotations s'opèrent autour d'axes OO′, LL′ qui généralement ne se rencontrent pas, et qui font un angle droit l'un avec l'autre.

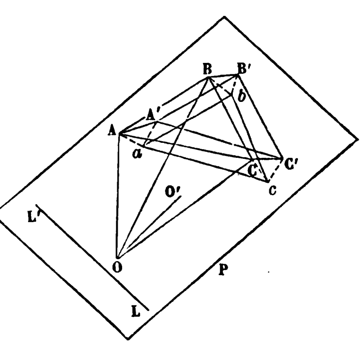


Fig. 150.

La droite LL′, intersection des deux positions successives du plan P mobile, a été appelée par Monge la *caractéristique* de ce plan.

Le point O, centre instantané de la rotation qui amène la figure ABC à coïncider dans son plan avec la projection sur ce plan de la position qu'elle va occuper dans l'espace, a été nommé *foyer* du plan par M. Chasles.

Les droites AO, BO, CO..., qui joignent le foyer aux divers points de

la figure sont toutes normales aux déplacements projetés A*a*, B*b*, C*c*.. et, par suite, aux déplacements effectifs AA′, BB′, CC′..... Donc, les plans normaux aux trajectoires AA′, BB′, CC′..... des divers points de la figure mobile contiennent les droites AO, BO, CO... et passent tous par le point O. De là ce théorème dû à M. Chasles :

Quand une figure plane se meut dans l'espace, les plans normaux menés dans une position particulière de cette figure aux trajectoires de ses différents points vont tous passer par un même point de son plan.

Ce théorème peut être considéré comme une extension du théorème du centre instantané de rotation pour les déplacements des figures planes dans leur plan (§ 77).

CHAPITRE VI

DES MÉCANISMES SIMPLES ET DES TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT.

112. Les machines que l'on emploie dans l'industrie comprennent en général trois parties distinctes :

1° Un *récepteur*, qui reçoit directement l'action de la puissance motrice, comme la roue dans un moulin à eau, les ailes dans un moulin à vent, le piston dans les machines à vapeur;

2° L'*outil*, ou appareil propre à exécuter l'ouvrage que l'on se propose de faire, comme la meule d'un moulin, ou les machines à raboter, à mortaiser, à aléser, d'une fabrique d'ouvrages en fer; l'outil ou les outils forment ordinairement la partie de la machine qui subit directement la principale résistance à vaincre;

3° Enfin, entre le récepteur et l'outil, une série de *mécanismes* ou d'organes propres à transformer le mouvement du récepteur en celui de l'outil, de manière à assurer à l'outil le mouvement et la vitesse qui conviennent le mieux au travail à exécuter.

L'étude des transformations de mouvement au point de vue géométrique est une branche de la cinématique. Nous allons examiner dans ce chapitre quelques-uns des mécanismes les plus simples et les plus généralement employés.

On n'admet guère dans les machines que deux genres de mouvement : le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire. Ce sont les plus faciles à réaliser.

Ces mouvements peuvent être ou *continus*, ou *alternatifs* ; *continus*, s'ils ont lieu toujours dans le même sens; *alternatifs*, s'ils ont lieu alternativement dans un sens, puis en sens contraire.

Un mouvement *rectiligne continu* n'est pas en général admissible dans une machine, parce que s'il se prolongeait indéfiniment, il éloignerait de plus en plus les points qui en seraient animés. Aussi les mouvements rectilignes continus sont-ils nécessairement limités en pratique à une certaine période au delà de laquelle le mouvement en sens contraire intervient pour ramener la pièce mobile à son point de départ et rendre le mouvement direct possible de nouveau.

Le mouvement circulaire continu est au contraire indéfiniment possible, sans restriction d'aucune sorte.

Les mouvements que l'on rencontre ordinairement dans les machines sont donc :

Le mouvement rectiligne alternatif;

Le mouvement circulaire, soit continu, soit alternatif.

113. Pour assurer le mouvement de rotation autour d'un axe fixe, on se sert d'un *arbre tournant*. La figure 151 représente un arbre tournant horizontal, en fer.

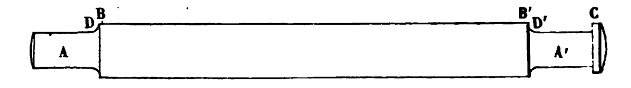


Fig. 151.

L'arbre est terminé à ses deux extrémités par deux *tourillons* A, A', qui s'engagent dans les *paliers* ou *coussinets*. Les épaulements B, B', ont pour objet d'empêcher les déplacements longitudinaux de l'arbre dans les paliers ; ils sont raccordés aux tourillons par des congés D, D'. Quelquefois on termine le tourillon par un *collet*, C, qui prévient tout déplacement latéral.

La *figure* 152 représente un *palier* avec *chapeau* et *godet de graissage*.

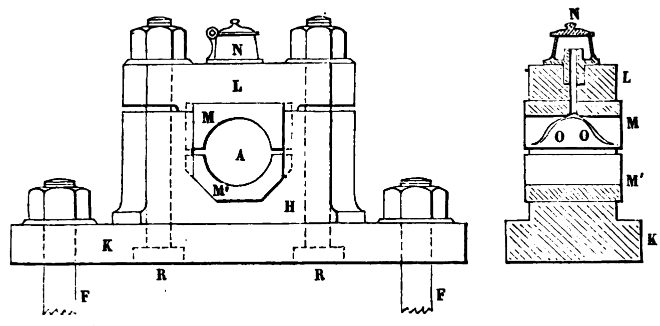


Fig. 152.

H, Palier ou coussinet. — K, Semelle. — F, F, Boulons pour fixer le palier. — L, Chapeau. — R, R, Boulons à tête noyée, pour serrer le chapeau contre le corps du palier. — M, Coquille supérieure (en cuivre). — M′, Coquille inférieure. — A, Vide occupé par le tourillon de l'arbre. — N, Godet de graissage. — O, O, Rainures hélicoïdes pratiquées dans la surface de la coquille supérieure, pour répartir l'huile de graissage sur le pourtour du tourillon.

On peut quelquefois supprimer le chapeau et la coquille supé-

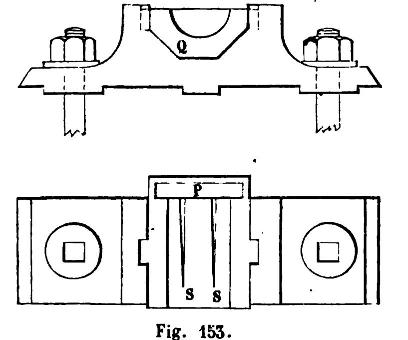


Fig. 153.

rieure. Alors l'arbre repose simplement dans le coussinet. La figure 153 représente un appareil de ce genre.

Le collet de l'arbre tournant plonge dans le réservoir d'huile P, et fait refluer l'huile dans les rainures de graissage S creusées dans la coquille inférieure Q.

Lorsque les arbres tournants n'ont pas à supporter de grands efforts, on réduit beaucoup le frottement des appuis en substituant des pointes coniques aux tourillons; c'est ce qu'on fait pour les *arbres de tours* (fig. 154).

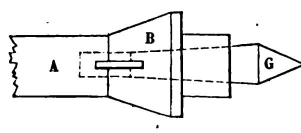


Fig. 154.

L'arbre A porte à ses extrémités un renflement B dans lequel on engage un goujon terminé en G par le tourillon conique. La pointe du cône s'appuie contre un plan fixe, dans lequel elle s'enfonce d'une petite quantité.

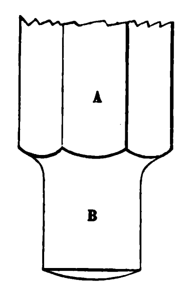


Fig. 155.
A, Arbre en fonte. — B, Pivot venu de fonte avec l'arbre. — C, surface légèrement sphérique terminant le pivot.

114. Les arbres verticaux sont terminés à leur partie supérieure par un tourillon qui s'engage dans un palier, et à leur base inférieure par un *pivot*, qui peut faire corps avec l'arbre, ou bien former une pièce rapportée.

Ce qu'il y a de particulier dans ce cas, c'est que l'arbre s'appuie non seulement sur la surface convexe du pivot, comme cela a lieu pour les tourillons, mais encore sur sa surface terminale, à laquelle on donne généralement une forme légèrement bombée (fig. 155).

Dans la figure 156, le pivot est rapporté; il est fixé au corps de

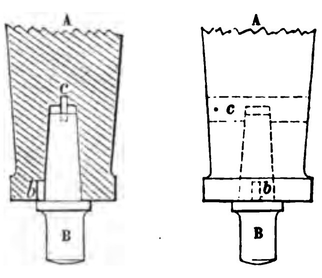


Fig. 156.

l'arbre au moyen d'un *prisonnier b;* et on ménage dans l'arbre

une ouverture *c* qui permet de chasser le pivot pour le remplacer.

La *crapaudine* est généralement formée d'un cylindre, ou *collet* en bronze, au dedans duquel glisse la surface convexe du pivot, et d'un *grain d'acier*, ou *culot*, sur lequel porte la surface terminale. On se ménage la possibilité de déplacer un peu, à l'aide de vis, la position de l'arbre, soit dans le plan horizontal, soit en hauteur.

La figure 157 représente la crapaudine simple ; les vis butantes

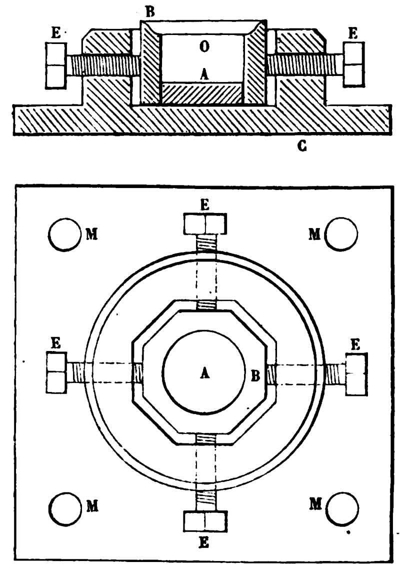


Fig. 157.

A, Grain d'acier. — B, Collet en bronze. — C, Boîte de la crapaudine, fixée par les boulons M, M, — O, Vide que vient occuper le pivot de l'arbre tournant. — E, Vis butantes.

permettent d'opérer de petits déplacements horizontaux de l'arbre sans déplacer la boîte.

La figure 158 représente la *crapaudine à arcade*, dans laquelle,

outre les vis butantes, une vis spéciale permet de soulever ou d'abaisser légèrement l'arbre tournant.

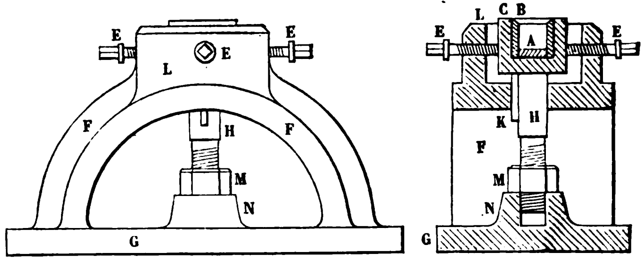
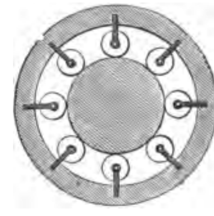


Fig. 158.

F, Arcade ou pont. — G, Semelle ou patin. — A, Grain d'acier. — B, Collet de bronze. — C, Première boîte. — E, Vis butantes, pour déplacer latéralement l'arbre avec la première boîte. — L, Seconde boîte, fixe, et faisant corps avec l'arcade. — H, Cylindre pour le soulèvement du pivot. Il traverse l'arcade et est muni dans cette région d'un ergot K, qui l'empêche de tourner sur lui-même. A sa partie inférieure il porte un pas de vis qui s'engage dans un écrou M. L'extrémité pénètre dans le vide du renflement, N, de la semelle. On obtient donc un petit déplacement du pivot en hauteur en tournant l'écrou dans le sens convenable.

115. Les arbres tournants verticaux, avons-nous dit, sont retenus à leur extrémité supérieure par un collier ou collet; pour réduire le frottement de l'arbre contre cette pièce au dedans de laquelle il tourne, on interpose quelquefois entre les deux un *collier à galets* représenté par la figure 159.



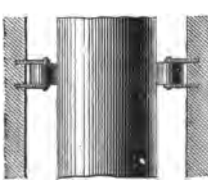


Fig. 159.

Grâce à cette disposition, le frottement de glissement est remplacé par un frottement de roulement de l'arbre contre les galets, lequel est beaucoup plus doux. Il y a bien encore un frottement de glissement, celui des tourillons des galets : mais la petitesse du diamètre des tourillons diminue notablement les inconvénients d'une pareille résistance.

Les couronnes de galets sur lesquelles reposent les *plaques*

tournantes (fig. 160) présentent une disposition analogue ; mais là le frottement peut être encore réduit, en laissant à la couronne

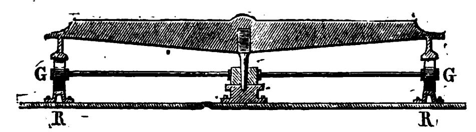


Fig. 160.

de galets la liberté de rouler sur un rail circulaire, au lieu de fixer d'une manière invariable les axes de chacun des galets. La surface convexe des galets G appartient à un cône dont le sommet est situé sur l'axe central de la plaque. Les galets roulent sur un rail circulaire, RR, qu'on peut supposer dressé dans un plan horizontal ; la plaque repose sur les galets par un second rail dont la surface de roulement a la même inclinaison que la génératrice la plus élevée des galets coniques. La couronne de galets roule donc sur un rail fixe, et la plaque roule sur la couronne de galets ; il est facile de voir que le déplacement angulaire de la plaque est double du déplacement angulaire de la couronne autour de son axe vertical.

116. Pour guider le mouvement rectiligne, on emploie les

Fig. 161.

AA, Châssis mobile. — BB, Montants servant à guider le châssis. — *m m*, Languettes ou oreilles, engagées dans les rainures pratiquées le long des montants B B.

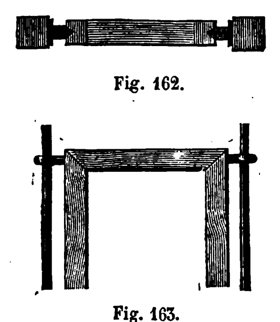
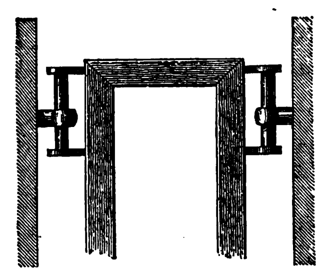


Fig. 162.

Fig. 163.

rainures et languettes (fig. 161), les *glissières* (fig. 162), les *an-*

neaux mobiles le long d'une tige fixe (fig. 163), les tiges mobiles à travers des anneaux fixes (fig. 164), les roulettes mobiles sur des montants fixes (fig. 165 et 166), les tiges mobiles roulant sur des cylindres fixes (fig. 167).



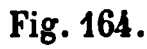


Fig. 164.

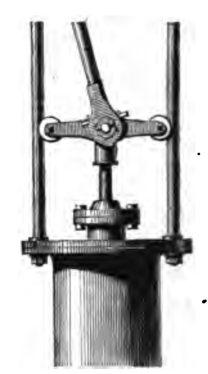


Fig. 165.

117. Le mouvement dans les machines peut être *uniforme*, *varié*, ou *périodique ;* on dit qu'il est *périodiquement uniforme* quand à certains intervalles de temps égaux entre eux, on retrouve toutes les pièces mobiles revenues aux mêmes positions et animées des mêmes vitesses.

Fig. 166.

Fig. 167.

Comme ordinairement on se propose de faire exécuter par une machine un seul genre de travail, exigeant un déplacement défini de l'outil, on assujettit les pièces mobiles à des liaisons qui, en rendant ce déplacement possible, empêchent la production de tout autre déplacement. C'est ce qu'on entend quand on dit que la machine est un système *à liaisons complètes ;* dans un tel système, le mouvement d'un point particulier n'est possible que sur une seule trajectoire et définit complétement le mouvement de tout autre point ; le problème cinématique que l'on doit se proposer de résoudre consiste alors à trouver la relation entre les mouvements des divers points. Nous allons en donner quelques exemples.

TRANSMISSION PAR COURROIE.

118. Les courroies servent à transformer un mouvement circulaire autour d'un axe en un mouvement circulaire autour d'un axe parallèle au premier.

Soient O et O′ la projection des axes parallèles; soient ω et ω' les vitesses de rotation qui doivent avoir lieu respectivement autour de ces axes. Supposons-les d'abord de même sens.

Pour lier ces axes entre eux par une courroie, et assurer le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ des vitesses angulaires, on montera sur les deux axes O et O′ des tambours cylindriques, ayant des rayons OA, O′A′, satisfaisant à la proportion

Fig. 168.

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{\omega'}{\omega}.$$

Puis on fera passer la courroie sur les deux tambours, de manière à embrasser les arcs ACB, A′C′B′, et à suivre d'un tambour à l'autre les tangentes AA′, BB′, aux deux surfaces. La courroie doit être assez tendue pour qu'elle ne puisse pas glisser sur la surface des tambours; cela étant, la transmission satisfait aux conditions imposées. En effet, si on imprime un petit déplacement au tambour OA autour de son axe O, le point A s'avancera d'une quantité infiniment petite AA_1', le long de la tangente AA_1'; la longueur de la courroie restant invariable, le point B′ se transportera le long de B′B d'une quantité $B'B'_1$ égale à AA_1; par suite la vitesse angulaire de l'arbre OA est mesurée par le rapport $\frac{AA_1}{OA}$, et celle de l'arbre O′A′, par le rapport $\frac{B'B'_1}{O'A'}$ ou $\frac{AA_1}{O'A'}$.

Donc le rapport des vitesses angulaires est égal à $\frac{O'A'}{OA}$, ou à $\frac{\omega}{\omega'}$;

si donc le premier arbre reçoit une vitesse angulaire ω, le second prendra une vitesse angulaire ω'. Dans cette transmission les vitesses linéaires sont égales à la surface des deux tambours.

Si les vitesses angulaires ω et ω' étaient en sens contraire l'une de l'autre, la courroie pourrait encore servir à lier les deux axes, mais il faudrait la mener suivant les tangentes intérieures aux deux cercles. Dans ce cas, on a soin de retourner la courroie dans le passage du point A au point A′ et du point B′ au point B; de cette manière, la courroie est en contact avec les deux tambours par sa face rugueuse, et non par sa face lisse ; et de plus, au point D d'intersection des deux tangentes, les deux *brins* AA′, BB′ sont à moitié retournés, et passent de champ l'un à côté de l'autre, sans se gêner mutuellement, comme cela aurait lieu si en cet endroit ils avaient conservé la position à plat qu'ils ont sur les cylindres.

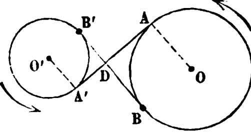
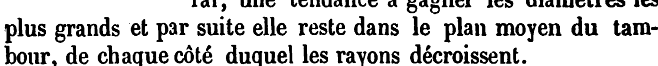


Fig. 169.


Fig. 170.

Pour assurer la stabilité de la courroie sur les tambours, et l'empêcher de se jeter de côté, on a soin de donner à la surface des tambours un léger bombement (fig. 170) ; la courroie s'applique sur la partie du cylindre qui a le plus grand diamètre ; elle a, en général, une tendance à gagner les diamètres les plus grands et par suite elle reste dans le plan moyen du tambour, de chaque côté duquel les rayons décroissent.



119. Lorsque la tension de la courroie devient trop faible pour développer sur les tambours l'adhérence nécessaire à la transmission, on peut accroître cette tension en faisant peser sur la courroie, en un point quelconque *m* de la portion libre AB, un rouleau N mobile autour de son axe, et attaché à un levier coudé, lequel peut tourner autour du point fixe I, et porte à son extrémité un contre-poids Q. La poignée M sert à déplacer le système autour de son axe. L'addition du contre-poids ne change rien au rapport des vitesses angulaires des deux arbres tournants; mais elle accroît l'adhérence et cela de deux manières : 1° en augmentant

la tension T de la courroie, par suite de la pression exercée par le rouleau N; 2° en augmentant légèrement les longueurs des arcs embrassés.

Lorsque la courroie est très-longue, son poids seul suffit à déve-

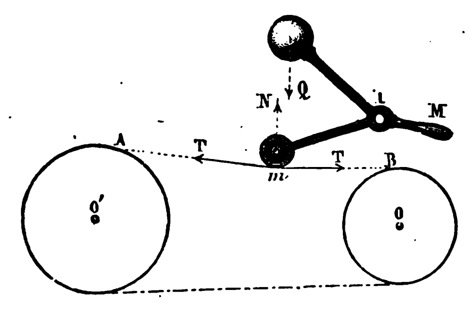


Fig. 171.

lopper l'adhérence nécessaire, sans même qu'elle soit tendue en ligne droite. On a utilisé cette propriété pour transmettre à grande

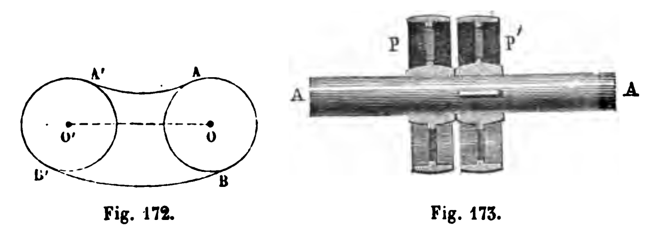
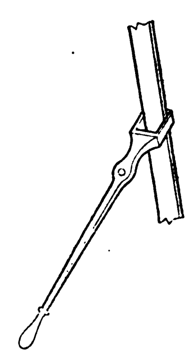


Fig. 172. Fig. 173.

distance le mouvement de rotation d'un axe à un autre; la distance des deux arbres O et O' peut être portée par exemple à une centaine de mètres. Ce genre de transmission à grande distance a été appliqué par M. Hirn à l'usine du Logelbach. Il est maintenant fort employé dans l'industrie. Le fil métallique qu'on substitue alors aux courroies plates dessine deux courbes AA', BB', entre les deux poulies. Les tambours, à surface légèrement bombée, sont remplacés par des gorges de poulie où le fil trouve à s'engager.

120. La transmission par courroie est l'une des plus employées dans les usines pour communiquer aux divers outils des ateliers le

mouvement emprunté à un arbre tournant qui reçoit l'action du moteur. Il faut qu'on puisse à volonté interrompre le mouvement de l'outil, et le faire naître de nouveau; pour cela (fig. 173) on monte à côté du tambour P', sur lequel passe la poulie, et qui communique le mouvement à l'outil, un tambour P de diamètre égal, mais qui n'est pas calé sur l'arbre AA', de telle sorte qu'il puisse tourner autour de cet arbre sans l'entraîner dans son mouvement. Ce second tambour est ce qu'on appelle une *poulie folle*. Quand l'ouvrier veut faire cesser le mouvement de l'outil, il n'a qu'à pousser latéralement un levier lequel est terminé par une fourche embrassant la courroie (fig. 174); entraînée par cette fourche, la courroie se déplace latéralement d'une certaine quantité, et quitte le tambour P', qui agit sur l'outil, pour entourer la poulie folle. L'outil est alors *désembrayé*. Pour le remettre en mouvement, il suffit de déplacer le levier en sens contraire, ce qui ramène la courroie sur le tambour P'.


Fig. 174.

On se sert aussi du déplacement latéral de la courroie pour changer le sens du mouvement de certaines machines-outils. Pour cela, on monte sur un même *axe géométrique* trois tambours égaux A, B, C (fig. 175); l'un de ces tambours est monté sur l'*axe matériel* O; le second, B, est monté sur un autre *axe matériel* O'; le tambour intermédiaire C est une poulie folle. L'axe O communique à l'outil un mouvement dans un certain sens, et l'axe O', le mouvement en sens contraire. Supposons qu'il s'agisse du mouvement rectiligne alternatif de la machine à raboter; on reliera le levier de la courroie à la machine, de manière que quand le rabot arrive à l'extrémité de sa course, la courroie se déplace latéralement dans le sens convenable de la quantité AB. A ce déplacement correspondra le changement de sens dans le mouvement de la machine. La poulie folle C, interposée entre les deux tambours A et B, a pour objet d'éviter les chocs brusques dans le passage de la courroie

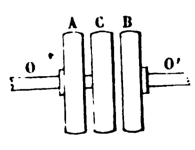


Fig. 175.

d'un tambour à l'autre, et de donner lieu à un petit *temps perdu* pendant lequel l'outil, cessant d'être sollicité par le tambour A que la courroie vient de quitter, perd graduellement sa vitesse pour en prendre une contraire au moment où la courroie atteint l'autre tambour B.

Lorsque l'outil mis en mouvement par la courroie doit travailler, suivant les circonstances, à des vitesses très-différentes les unes des autres, on remplace les deux tambours sur lesquels passe la courroie par une série de tambours de différents diamètres, juxtaposés et montés ensemble sur le même arbre. De cette manière, on a par exemple le choix entre 4 tambours moteurs, A, B, C, D, qui correspondent respectivement aux tambours *a*, *b*, *c*, *d* de la machine-outil. On a soin que la somme des rayons des tambours correspondants soit sensiblement constante. De cette manière, la même courroie pourra servir sans variation de longueur à transmettre le mouvement de l'un des arbres à l'autre; en effet la longueur d'une courroie est à peu près égale au double de la distance des centres des tambours, augmenté de la somme des deux demi-circonférences embrassées; si donc les rayons R et r sont les rayons des deux tambours, et D la distance des centres, supposée très-grande par rapport aux rayons R et r, la longueur L de la courroie sera à peu près égale à

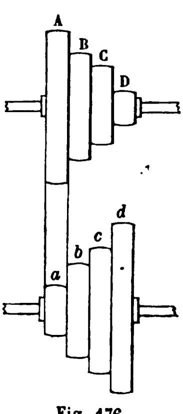


Fig. 176.

$$L = 2D + \pi\,(R + r)^{1}.$$

[1] Voici la formule exacte qui donne la longueur de la courroie tendue :

Soit α, l'angle aigu (évalué en parties du rayon) que fait la courroie avec la ligne des centres des tambours; nous aurons, en supposant $R > r$ ou au moins égal à r,

$$L = \pi(R + r) + 2\sqrt{D^2 - (R \mp r)^2} + 2\alpha(R \mp r)$$

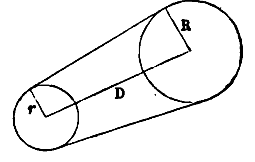


Fig. 177.

Il faut prendre le signe supérieur —, si la courroie est extérieure aux deux cylindres, et le signe inférieur +, si elle passe entre les deux. Lorsque α est très-

et comme D est constant pour deux tambours conjugués, il faut que $R + r$ soit aussi constant pour une même longueur L.

Le rapport des vitesses angulaires des deux tambours est égal à l'inverse du rapport des rayons; si par exemple les rayons des tambours successifs A, B, C, D, sont représentés par les nombres 4, 3, 2, 1,
et ceux des tambours a, b, c, d, par les nombres
1, 2, 3, 4,
qui donnent chacun avec son conjugué une même somme 5, le rapport de la vitesse angulaire de l'arbre O' à la vitesse angulaire de l'arbre O sera représenté par les nombres

$$4, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4},$$

suivant que la courroie passera sur les tambours

A et a, B et b, C et c, D et d.

La transmission par courroie est un des procédés les plus généralement employés dans l'industrie; c'est un exemple de *la transformation d'un mouvement circulaire continu autour d'un axe, en un mouvement circulaire continu autour d'un second axe parallèle au premier.*

THÉORIE DES ENGRENAGES.

121. Les engrenages ont pour objet de transformer un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un autre axe; si le premier mouvement est uniforme, le second doit être uniforme également, et il doit exister un rapport constant entre les vitesses de rotation simultanées autour de chacun des axes.

Les engrenages se partagent en plusieurs classes suivant la situation relative des deux axes autour desquels s'opèrent les deux rotations. Ces deux axes peuvent être parallèles, ou concourants, ou enfin ils peuvent se croiser dans l'espace sans avoir aucun point commun.

petit, que R est peu différent de r, et qu'enfin la courroie est extérieure, on peut prendre approximativement

$$L = \pi (R + r) + 2D.$$

Dans le premier cas, l'engrenage est *cylindrique*.

Dans le second, l'engrenage est *conique*.

L'engrenage *hyperboloïde* et la *vis sans fin* sont des solutions directes du troisième cas; la vis sans fin suppose que les deux axes sont rectangulaires.

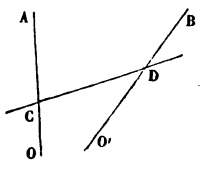


Fig. 178.

Mais on peut toujours ramener le troisième cas aux deux premiers; car, étant donnés deux axes OA, O′ B, qui ne se rencontrent pas, on peut pour transmettre le mouvement de l'un à l'autre se servir d'un axe auxiliaire, CD, qui les rencontre tous deux, puis transmettre la rotation de l'axe OA à l'axe CD par un engrenage conique, et la rotation de l'axe CD à l'axe O′ B par un second engrenage conique.

ENGRENAGES CYLINDRIQUES.

122. *Transmission par simple adhérence*. Les axes donnés étant supposés parallèles, prenons-les perpendiculaires au plan du papier; soit O la trace de l'un, O′ la trace de l'autre.

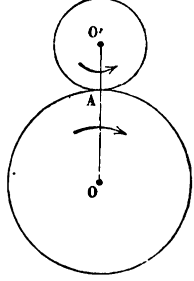


Fig. 179.

Soit ω la vitesse de la rotation autour de l'axe O, et ω' la vitesse de la rotation autour de l'axe O′, ces deux rotations ayant lieu *en sens contraire* l'une de l'autre, comme l'indiquent les flèches.

Joignons OO′, et sur cette droite, cherchons un point A tel, qu'en considérant successivement ce point comme lié à l'axe O et à l'axe O′, *il ait dans les deux mouvements des vitesses linéaires égales et dirigées dans le même sens.*

S'il est entraîné par la rotation autour de O, le point A a une vitesse linéaire perpendiculaire à OA, et égale à $OA \times \omega$; de même, s'il est lié à l'axe O′, il a une vitesse linéaire perpendiculaire à O′A, et égale à $O'A \times \omega'$. Les deux vitesses sont d'ailleurs *dirigées*

dans le même sens, et elles seront égales si l'on a l'équation

$$AO \times \omega = O'A \times \omega',$$

ou bien

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{\omega'}{\omega},$$

C'est-à-dire si le point A partage la droite OO' dans le *rapport inverse des vitesses angulaires*.

Le rapport des vitesses angulaires étant donné, la position du point A sur la ligne des centres s'en déduit sans aucune ambiguïté.

Du point O comme centre avec un rayon égal à OA, décrivons une circonférence ; de même, du point O' comme centre, décrivons une circonférence avec un rayon égal à O'A ; ces deux circonférences seront tangentes en A, et si on leur communique autour de leurs centres, dans le sens des flèches, des vitesses angulaires égales respectivement à ω et ω', les deux circonférences, dans leur mouvement simultané, ne glisseront jamais l'une contre l'autre au point de contact A, puisque les vitesses linéaires de ces deux circonférences sont rigoureusement égales.

Si donc, à la place de ces circonférences, on monte sur les axes O et O' deux roues matérielles ayant pour rayon OA et O'A, et si l'on forme les jantes de ces roues de matières ayant la propriété d'adhérer suffisamment l'une à l'autre, il n'y aura qu'à communiquer à la roue OA un mouvement de rotation égal à ω, pour donner à la roue O'A en sens contraire un mouvement de rotation égal à ω', car l'adhérence qui se développe au contact A empêche le glissement d'une des roues sur la jante de l'autre. Le problème de la transformation est ainsi résolu par le simple contact de deux roues : dans cette solution, le mouvement relatif de l'une des roues par rapport à l'autre est un roulement sans aucun mélange de glissement.

Lorsque la communication du mouvement s'opère ainsi par simple contact d'une roue à l'autre, *le travail du frottement au point de contact des deux roues est nul ;* le frottement n'est pas nul, car c'est le frottement qui entraîne une roue au moyen de l'autre ; mais le *travail du frottement*, ou le produit de la force du frottement par le glissement relatif, est constamment égal à zéro [1].

[1] On verra plus tard la définition du *travail mécanique*. Il suffit ici de

La solution qui vient d'être indiquée est appliquée dans l'industrie ; on entoure les deux roues, soit d'une bande de cuir, soit d'une couche de gutta-percha, pour assurer une adhérence suffisante entre les deux roues ; enfin, c'est la simple adhérence de la roue motrice de la locomotive sur le rail qui rend possible la traction des trains sur les chemins de fer.

Mais cette solution a des inconvénients qui ne permettent pas de l'employer d'une manière générale. Les parties en contact des deux roues s'usent rapidement par l'effet de leur pression mutuelle. Il en résulte que l'adhérence diminue successivement ; pour la ramener à sa limite, il faut rapprocher les axes O et O′ de la quantité perdue par l'usure du pourtour des roues. On doit donc se réserver un moyen de *rappeler* les axes et de régler à volonté la pression des roues l'une sur l'autre, pression à laquelle le frottement est proportionnel. Mais la pression mutuelle des deux roues se transmet aux arbres tournants et à leurs tourillons ; augmenter la pression mutuelle des deux roues au point A, c'est donc augmenter le frottement dans les tourillons des arbres ; il est possible par conséquent, si l'on a de grands efforts à transmettre d'une roue à l'autre, qu'il n'y ait rien à gagner, comme *travail du frottement*, à l'adoption de la transmission par adhérence.

Remarquons l'analogie qui existe entre cette transmission et la transmission par courroie. Là encore les vitesses linéaires à la circonférence des deux tambours sont égales ; de plus, il faut un moyen de régler la tension de la courroie ; pour cela, au lieu d'avoir à faire varier la distance des arbres tournants, on abaisse sur la courroie un rouleau muni d'un contre-poids, ce qui est infiniment plus simple. L'adhérence de la courroie sur le tambour est d'ailleurs bien mieux assurée que l'adhérence de deux roues tangentes l'une à l'autre, et elle croît rapidement avec les arcs embrassés.

123. *Solution géométrique du problème des engrenages.*

Les circonférences OA, O′A, jouent un grand rôle dans la théorie des engrenages. On les appelle les *circonférences primitives* des roues.

L'une des roues est la *roue menante*, l'autre la *roue menée.*

faire observer que le travail est le produit d'une force par un espace parcouru, et qu'il y a intérêt dans les machines à réduire le plus possible le travai du frottement et des autres résistances accessoires, dites *résistances passives*

Quand l'engrenage est construit de telle sorte que chaque roue puisse *mener* l'autre, on dit qu'il est *réciproque*. Tous les engrenages ne sont pas réciproques, comme nous le reconnaîtrons plus loin.

Les deux roues ayant généralement des rayons inégaux, on donne le nom de *pignon* à la plus petite.

La solution générale du problème des engrenages consiste à armer l'une des roues, la roue menante, de parties appelées *dents*, qui font saillie sur la circonférence primitive, et à découper dans l'autre roue, la roue menée, des cavités dans lesquelles les dents viennent successivement s'engager. Les dents doivent avoir un profil tel, que, dans le mouvement commun des deux roues conjuguées, elles soient toujours tangentes au profil du creux avec lequel elles sont en prise et qu'elles poussent dans la direction convenable. Il est nécessaire, en effet, que les deux profils soient toujours tangents au point où ils agissent l'un sur l'autre; ils ne peuvent se couper, car il en résulterait que le plein de la dent pénétrerait dans le plein de la roue conjuguée; et s'ils se pressaient par une arête, cette arête agirait sur le profil à la façon d'un outil tranchant, elle en altérerait le tracé, ou bien s'effacerait elle-même par l'usure; les profils seraient donc ramenés, par l'usure des pièces, aux conditions du contact géométrique qu'on peut leur assurer tout d'abord.

Dans le mouvement relatif d'une roue par rapport à l'autre, le profil du creux de la roue menée doit donc être constamment tangent au profil de la dent de la roue menante; si l'on se donne arbitrairement le premier profil, on obtiendra le second en cherchant la courbe *enveloppée* par le premier profil, dans le mouvement relatif de la roue menée par rapport à la roue menante.

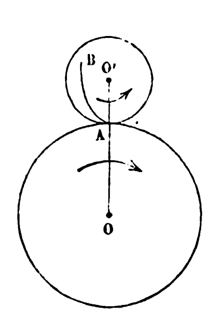


Fig. 180.

Cherchons d'abord le mouvement relatif de la roue O′ par rapport à la roue O. Pour cela (§ 104), imprimons à tout le système, autour de l'axe O, une vitesse de rotation égale et contraire à la vitesse ω. La roue O sera ramenée au repos, et la roue O′ sera animée d'une double rotation, savoir, ω' autour de O′ et ω autour de O; ces deux

rotations seront dans le même sens, puisque les rotations primitives ω et ω' étaient supposées en sens contraires. Elles se composent (§ 94) en une rotation unique, $\Omega = \omega + \omega'$, autour d'un axe parallèle à O et O', et qui partage la distance OO' en deux parties réciproquement proportionnelles à ω et ω', c'est-à-dire autour de l'axe projeté en A, point de contact des deux circonférences primitives. Le mouvement relatif de la roue O' par rapport à la roue O est donc une rotation autour du point A, égale à la somme $\omega + \omega'$ des deux rotations données; en d'autres termes, la roue O' roule sur la circonférence primitive O, ce que nous avions déjà reconnu.

Soit AB (fig. 180) une courbe quelconque, arbitrairement choisie, attachée à la roue O', et représentant le profil du creux; pour en déduire le profil correspondant de la dent à ajouter à la circonférence O, on fera rouler sur la roue O la roue O' qui entraîne ce profil AB, et on construira la courbe formée par les intersections successives de ce profil.

Le problème est ramené ainsi à trouver la courbe enveloppée par une ligne plane, de forme constante, qui se déplace dans son plan d'après une loi déterminée. Nous savons résoudre ce problème (§ 82).

Soit MN (fig. 181) la ligne mobile dans une de ses positions particulières; soit au même instant C le centre instantané de rotation de la figure; nous savons que si du point C on abaisse une perpendiculaire CP sur la ligne MN, le point P, pied de cette perpendiculaire, est le point où MN touche son enveloppe.

Appliquons ce théorème aux

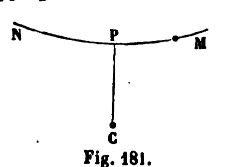


Fig. 181.

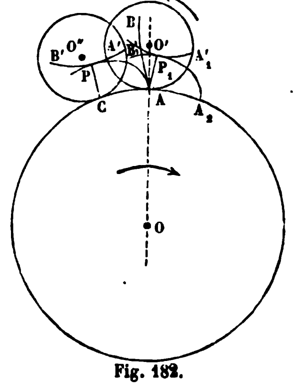


Fig. 182.

engrenages. Faisons rouler (fig. 182) le cercle O' sur le cercle O;

soit O″ une position du cercle mobile au bout d'un certain temps, et soit C le point de contact des deux cercles dans cette position. Pour trouver la position correspondante du profil AB, prenons sur le cercle O″, à partir du point C, un arc CA′ égal à l'arc AC ; le point A′ sera la position du point A dans le cercle O″; le profil AB occupera par conséquent la position A′ B′. On aura donc un point du profil conjugué en abaissant du point C, centre instantané de rotation de la figure O″, une perpendiculaire CP sur le profil A′ B′; si l'on répète cette construction pour un certain nombre de positions intermédiaires entre O′ et O″, on obtiendra pour la dent le profil AP.

124. Cette construction nous fournit un nouveau théorème relatif aux engrenages. Ramenons la figure O″ sur la figure O′, par une rotation autour du centre O, et faisons participer la roue O à cette rotation ; le point A de cette roue viendra en A_2 à une distance $AA_2 = AC$; le point C viendra en A, le point A′ en A'_1, et l'arc AA'_1 sera égal à AA_2; le profil A′B′ prendra la position $A'_1B'_1$, le point P passera en P_1, et le profil AP viendra occuper la position $A_2 P_1$; enfin la droite CP, normale aux deux profils, prendra la position AP_1, et *sera encore normale au point* P_1 *aux deux profils qui sont en prise.* Mais les deux roues O et O′ sont alors ramenées à leur position véritable, et elles ont reçu autour de leurs centres respectifs des déplacements angulaires simultanés qui sont compatibles avec le rapport donné de leurs vitesses ω et ω'. Donc, *dans le mouvement commun des deux roues, la droite élevée perpendiculairement au point de contact des deux profils en prise passe constamment par le point de contact* A *des deux circonférences primitives.*

125. Ce théorème conduit immédiatement à la détermination de l'*arc de glissement élémentaire* de l'un des profils sur l'autre (fig. 183).

Considérons dans une position quelconque les deux profils en prise, CD et BE, et soit P leur point de contact; la droite PA est normale à la fois aux deux lignes BE, CD, en vertu du théorème précédent.

Cherchons le glissement relatif élémentaire σ, de l'un des profils par rapport à l'autre.

Pour cela, observons que le mouvement relatif de la roue O′ par rapport à la roue O est une rotation autour du point A, et que la vitesse angulaire est égale à la somme, $\omega + \omega'$, des vitesses de rotation don-

nées. Dans un temps infiniment petit θ, le profil CD tourne donc autour de A d'un angle $(\omega + \omega')\,\theta$; et le point de contact P parcourt sur le profil BE un arc égal à $(\omega + \omega')\,\theta \times AP$, ou à $p\,(\omega + \omega')\,\theta$, en appelant p la longueur de la normale commune AP. Cette formule peut se transformer ; en effet $\omega\theta$ est l'angle dont tourne pendant le temps θ la roue O autour de son centre ; soit s l'arc infiniment petit décrit dans ce temps θ par un point de la circonférence primitive OA : nous aurons $\omega\theta = \frac{s}{R}$, R étant le rayon OA ; de même, $\omega'\theta = \frac{s}{R'}$, R' étant le rayon de la circonférence primitive O'A.

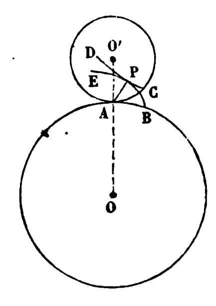


Fig. 183.

L'arc s est d'ailleurs le même pour ces deux circonférences, puisque leurs vitesses linéaires sont égales. Donc

$$(\omega+\omega')\,\theta = s\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

et par suite

$$p\,(\omega+\omega')\,\theta = p\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)s,$$

ou bien

$$\sigma = p\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)s,$$

formule qui donne l'arc de glissement relatif élémentaire en fonction du déplacement linéaire commun aux deux roues, mesuré sur les circonférences primitives.

Remarquons que, pour un même déplacement s, l'arc de glissement σ est proportionnel à p ; comme cet arc σ entre en facteur dans l'expression du travail du frottement, il y a intérêt à le réduire le plus possible.

On doit donc faire en sorte que p reste toujours très-petit. Les profils des deux roues sont toujours choisis de manière que le contact puisse avoir lieu à un certain moment au point A lui-même ; alors p est nul, et le glissement élémentaire est nul aussi. On limite d'ailleurs la dent de manière à maintenir p au-dessous d'une certaine valeur ; le contact des deux profils cesse au point où la longueur de la dent fait défaut ; mais

la continuité de la transmission exige qu'au même moment deux nouveaux profils soient en prise au point A; ces deux profils se déplacent ensuite simultanément, comme l'ont fait les deux précédents, et quand leur contact cesse, le contact est établi au point A entre les deux profils qui les suivent. On voit par là qu'il y a une relation à observer entre la longueur des dents et l'espacement de deux profils consécutifs mesuré sur l'une ou l'autre des circonférences primitives, espacement qu'on appelle le *pas* de l'engrenage.

126. La petitesse du pas permet d'obtenir approximativement la valeur de l'arc total de glissement relatif Σ pour une dent particulière depuis le moment où le contact des deux profils conjugués est établi au point A, jusqu'au moment où la prise cesse parce que les deux roues ont avancé d'un pas.

Quand un corps roule et glisse à la fois sur un autre, on obtient l'arc de glissement élémentaire en prenant la distance infiniment petite produite par le déplacement relatif entre deux points primitivement en contact.

Fig. 184.

Appliquons cette règle au déplacement commun des deux roues O et O'. Soit AB = AC = S le pas dont se déplacent simultanément les deux circonférences; les deux points C et B étaient primitivement réunis en un seul au point A. Donc le glissement relatif n'est autre chose que la distance CB. Le pas étant très-petit, on peut confondre sensiblement les arcs AC, AB avec les perpendiculaires CC', BB', qui sont égales entre elles, puisque les arcs sont égaux; la distance CB est, par suite, égale à sa projection C'B' sur la ligne des centres, ou à la somme AB' + AC'.

Or l'arc AB, dans le cercle O, peut être confondu avec sa corde, ce qui donne

$$S^2 = 2R \times AB'.$$

De même dans le cercle O'

$$S^2 = 2R' \times AC'.$$

Donc enfin

$$AB' + AC' = \text{arc de glissement total } \Sigma = \frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

127. Nous avons vu qu'il y avait avantage à réduire le pas S mesuré

sur les deux circonférences primitives, ce qui ne peut se faire sans augmenter le nombre des dents sur chaque roue. Soit m le nombre de dents de la roue O, m' le nombre de dents de la roue O'; on aura les relations :

$$mS = 2\pi R,$$
$$m'S = 2\pi R'.$$

Donc

$$m = \frac{2\pi R}{S} \quad \text{et} \quad m' = \frac{2\pi R'}{S}.$$

Le pas est ainsi une partie aliquote de chacune des circonférences primitives. C'est une commune mesure de ces deux circonférences. Sur chaque roue, le pas comprend deux parties, un *plein*, qui sert de base à la saillie de la dent, et un *creux*, intervalle libre entre deux pleins consécutifs dans lequel vient se loger la dent de la roue conjuguée. La dent reçoit d'ailleurs un profil symétrique sur ses deux faces, pour que la roue O puisse conduire la roue O' dans un sens ou dans l'autre ; on donne la réciprocité à l'engrenage, quand cela est possible, en ajoutant à la roue O' des dents destinées à agir sur les faces des creux de la roue O. Chaque dent remplit le creux de la roue conjuguée au passage à travers la ligne des centres, sauf un *jeu* qu'il est nécessaire de ménager entre les profils qui ne doivent pas agir l'un sur l'autre. Ce jeu facilite le passage des deux roues à travers la ligne des centres; mais, par contre, si l'on renverse subitement le mouvement de l'une des roues, le contact des deux roues ne s'établit pas immédiatement sur les faces opposées, et il se produit ce qu'on appelle un *temps perdu*.

En résumé, le pas S se compose de l'épaisseur de la dent de la roue O mesurée sur la circonférence primitive, augmentée de l'épaisseur de la dent de la roue O', et d'un certain jeu que l'expérience a conduit à déterminer, et qui est d'autant plus petit que l'engrenage est plus soigné et plus voisin de sa forme géométrique. L'usure mutuelle des dents fait décroître les épaisseurs et augmente le jeu, sans rien changer au pas.

Ce sont des conditions de résistance qui limitent le nombre de dents sur chaque roue ; les dents transmettent des pressions d'une roue à l'autre; il faut donc leur donner des dimensions telles qu'elles ne soient pas exposées à rompre ou à fléchir, et l'on ne pourrait en réduire indéfiniment l'épaisseur.

128. Les vitesses angulaires des deux roues sont proportionnelles à $\frac{S}{R}$ et à $\frac{S}{R'}$, et par suite proportionnelles à $\frac{1}{m}$ et à $\frac{1}{m'}$; le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des deux vitesses angulaires est donc égal à l'inverse $\frac{m}{m'}$ du rapport des nombres de dents sur chaque roue. L'emploi des roues d'engrenage suppose donc que les vitesses angulaires sont commensurables entre elles.

En général, les roues d'engrenage ont au moins 6 dents; le nombre de dents excède rarement 120; le rapport des vitesses angulaires d'une roue de 6 dents engrenant avec une roue de 120 est égal à 20.

On appelle *raison* d'un engrenage ou d'un *équipage de roues dentées* le rapport de la vitesse angulaire de la dernière roue de l'équipage à la vitesse angulaire de la première, ce rapport étant pris avec le signe + ou le signe — suivant que les rotations s'opèrent dans le même sens ou en sens contraires. Il est facile de voir que la *raison* d'un équipage de roues dentées est le produit des raisons de chacun des engrenages particuliers qui composent cet équipage.

ÉTUDE DES TRACÉS PARTICULIERS DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES.

ENGRENAGE A LANTERNE.

129. L'engrenage à lanterne est celui dans lequel on adopte pour profil des dents du pignon un point unique, ou plutôt un cercle de rayon très-petit, décrit autour de ce point pour centre.

Supposons d'abord que le profil donné du creux de la roue O′ se réduise à un seul point, le point A, situé sur la circonférence primitive; ce sera par exemple une aiguille implantée sur le périmètre de la roue O′.

L'enveloppe des positions successives de ce profil dans le mouvement relatif sera la courbe décrite par le point A lui-même. Ce sera donc l'épicycloïde AP, décrite par le point A quand on fait rouler le cercle O′ sur le cercle O.

Si ensuite on fait rouler le cercle O′ dans l'autre sens, le point A décrira la branche symétrique AP′ de la même épicycloïde.

Soit AB = AC = le pas.

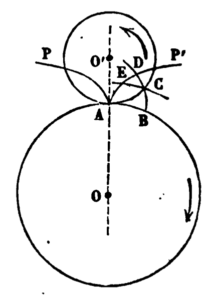


Fig. 185.

C sera la position sur la roue O′ de l'aiguille voisine de l'aiguille A ; menons au point B l'épicycloïde BD : elle passera au point C et formera avec le profil AP′ une figure ogivale ADB ; mais la dent de la roue O ne doit pas pousser l'aiguille plus loin que l'intervalle AC ; la portion CD du profil moteur est donc inutile, et par suite on coupera la dent ADB par un arc de cercle EC, décrit du point O comme centre avec la distance OC pour rayon. Le partie utile de la dent est donc le profil trapézoïdal BCEA ; la face BC est celle qui pousse les aiguilles de la roue O′ dans le sens des flèches ; la face opposée, AE, les pousse quand on renverse le sens des mouvements. Dans ce tracé géométrique, nous n'avons pas réservé de jeu.

130. Le tracé pratique de ce système d'engrenages diffère du tracé géométrique ainsi formulé. Les aiguilles A, C, de la roue O′ ne peuvent être sans épaisseur ; on substitue aux points A et C des cercles décrits avec un même rayon très-petit, autour de ces points comme centres.

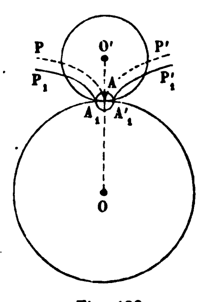


Fig. 186.

Les profils AP, AP′, doivent donc être amaigris chacun d'une quantité égale au rayon de ces cercles. Le profil corrigé, au lieu d'être un arc d'épicycloïde, est une trajectoire orthogonale des normales à cette épicycloïde.

A la courbe AP on substitue donc une courbe équidistante $A_1 P_1$, et de même à la courbe AP′ une courbe équidistante $A_1 P_1'$. Ces deux nouvelles courbes ne se rejoignent plus en un même point, comme le faisaient les deux premières, car l'une, $A_1 P_1$, est l'enveloppe des positions successives du bord du cercle A situé à gauche, tandis que l'autre, $A_1' P_1'$, est l'enveloppe des positions du bord situé à droite (fig. 187) ; on peut

les raccorder en traçant de l'une à l'autre une courbe $A_1 A'' A'_1$ qu'on appelle *courbe d'évidement* et dans le creux de laquelle le cercle A vient se loger au moment où il traverse la ligne des centres. Le tracé des dents s'effectue en définitive comme l'indique la figure 188.

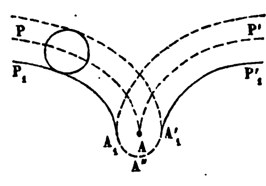


Fig. 187.

131. L'engrenage à lanterne est l'engrenage primitif des moulins; la figure 189 en représente la disposition.

La roue O porte alors le nom

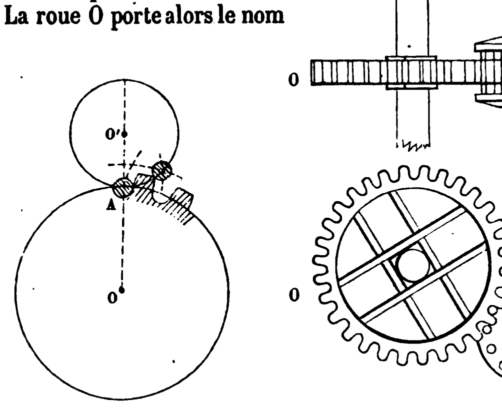


Fig. 188. Fig. 189.

de *rouet;* la roue O', de *lanterne.* Le nom de roue est réservé pour le récepteur hydraulique qui donne le mouvement à toute la machine.

La roue O' est formée de deux plateaux circulaires traversés par l'arbre tournant. Ces plateaux ou *tourteaux* débordent la circonférence primitive; les cercles équidistants qui représentent les dents de cette circonférence sont les sections droites d'aiguilles cylindriques appelées *fuseaux*, implantées dans les tourteaux ; l'assemblage des deux tourteaux par l'intermédiaire des aiguilles constitue la *lanterne;* elle a dans le sens de

son axe une largeur supérieure à celle de la roue O ; les dents de cette roue viennent pénétrer entre les deux tourteaux. Ces dents sont généralement en bois, et elles sont implantées sur la jante de la roue O, qui est également en bois. Les dents d'engrenages qui peuvent ainsi se détacher de la roue sont nommées *aluchons*. Les aiguilles cylindriques de la lanterne sont généralement aussi en bois, dans les anciens moulins. L'engrenage est alors formé d'une multitude de pièces, faciles à tailler, et faciles à remplacer.

On a été conduit à remplacer le bois par le fer pour les fuseaux de la lanterne ; remarquons en effet, que le contact des fuseaux avec les dents de la roue O s'opère toujours à peu près sur la même génératrice ; en coupe, le point de contact du cercle avec le profil qui le pousse varie à peine de position dans le pacours d'un pas. Sur le profil de la dent au contraire, le contact se déplace d'un bout à l'autre de l'étendue de ce profil. De là résulte que l'usure de la dent se répartit avec une certaine égalité sur tous les points de son développement, tandis qu'elle porte toute entière sur une même région du fuseau, laquelle se refouille de plus en plus, jusqu'à la rupture. Le fer est préférable au bois pour une pièce qui doit travailler dans des conditions semblables.

132. L'engrenage à lanterne que nous venons de décrire est l'engrenage extérieur ; la même solution s'applique à l'engrenage intérieur ; la lanterne est alors au dedans de la grande roue ; les dents de cette roue sont dirigées vers le centre. A l'épicycloïde extérieure est substituée une épicycloïde intérieure. Les vitesses de rotation des deux roues sont dirigées dans le même sens, ce qui arrive toujours quand l'engrenage est intérieur. — Mais on a alors une certaine difficulté pour loger les bras de la roue O, car il faut les placer en dehors de la région occupée par lanterne, laquelle a plus d'épaisseur que les dents de la roue O. De plus, l'axe de lanterne ne peut être prolongé que d'un côté. C'est ce qu'indique la figure 190.

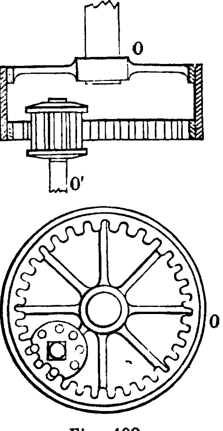


Fig. 190.

ENGRENAGE A FLANCS.

133. Soient OA, O'A les deux circonférences primitives.

Prenons le rayon O'A pour profil du creux de la roue O', et cherchons la forme correspondante du profil des dents de la roue O. Il suffit de faire rouler le cercle O' sur le cercle O et de construire l'enveloppe des positions successives de ce rayon O'A.

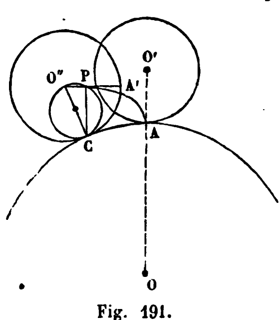


Fig. 191.

Considérons le cercle mobile dans la position O''; le point A a été amené dans la position A', et l'arc CA' est égal à l'arc CA. Le point P, pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur O''A', est un point du profil cherché. Or décrivons une circonférence sur O'' C comme diamètre; elle passera par le point P puisque l'angle O'' PC est droit. De plus l'angle A'O'' C a pour mesure, dans le cercle dont O'' C est le rayon, le rapport $\frac{\text{arc A}'\text{C}}{\text{O}''\text{C}}$; dans le cercle dont O''C est le diamètre, il a pour mesure

$$\frac{\frac{1}{2}\text{ arc CP}}{\frac{\text{O}''\text{ C}}{2}}.$$

On a donc l'égalité

$$\frac{\text{arc A}'\text{C}}{\text{O}''\text{ C}}=\frac{\frac{1}{2}\text{arc CP}}{\frac{1}{2}\text{O}''\text{C}};$$

et par suite arc A' C = arc CP; donc enfin arc CP = arc CA; le point P peut donc être obtenu en faisant rouler sur la circonférence OA le cercle décrit sur le rayon O'A comme diamètre; le point A de ce cercle décrira le profil cherché, lequel est par conséquent un arc d'épicycloïde.

Remarquons que si l'on fait rouler le cercle de diamètre O'A dans la circonférence primitive O', le point A du cercle mobile décrit le diamètre AO'; de sorte que les deux profils qui engrè-

nent ensemble sont les lieux géométriques décrits par un point d'un même cercle, qui roule successivement sur chacune des circonférences primitives.

Ce mode de génération peut être généralisé ; si l'on prend arbitrairement une courbe tangente aux deux circonférences primitives au point A, et qu'on la fasse rouler successivement sur chacune de ces circonférences, un point quelconque, invariablement attaché à cette courbe et entraîné dans les mouvements qu'on lui imprime, décrira deux courbes épicycloïdales qui auront la propriété d'engrener l'une avec l'autre.

134. Jusqu'ici, l'une des roues, O, porte les dents épicycloïdales, et l'autre roue, O′, porte des flancs rectilignes.

Pour donner la réciprocité à l'engrenage à flancs, on prolongera à l'*intérieur* la dent de la roue O, par un rayon qui formera le profil du flanc de cette roue ; puis on prolongera à l'*extérieur* le flanc de la roue O′ par un profil épicycloïdal engendré par un point de la circonférence décrite sur OA comme diamètre, qu'on fera rouler à l'extérieur de la circonférence primitive O′A. De cette façon, chaque roue portera un flanc droit raccordé avec la dent épicycloïdale; le flanc de chaque roue engrènera avec la dent de l'autre, et l'engrenage sera par conséquent *réciproque*. Cette réciprocité géométrique est nécessaire au point de vue physique pour que chaque roue puisse mener l'autre. En effet, l'engrenage serait à l'abri des *arcs boutements*, si la dent pouvait toujours mener le flanc, et si jamais le flanc ne menait la dent, ce qui supposerait que le contact des deux profils pût commencer seulement au passage à la ligne des centres.

Cette condition n'est pas possible à satisfaire. Le contact, s'opérant sur la longueur d'un pas après la ligne des centres, s'opère aussi sur une longueur d'un pas avant cette ligne; dans cette région, les frottements sont beaucoup plus durs, et si le pas était trop long, il arriverait que la pointe de la dent menée par le flanc, exercerait contre la surface du flanc une pression assez grande pour arrêter le mouvement de transmission, ou bien pour enlever un copeau de matière sur le profil du flanc, comme un ciseau poussé à la surface d'un madrier. On évite cet effet en adoptant un pas très-petit; les contacts sont alors voisins de la ligne des centres. C'est pour cela qu'on *échanfrine* les dents

en les coupant par un cercle qui leur enlève toute la portion nuisible de leur longueur [1].

Si l'on donnait à la roue O′ seulement des flancs, à la roue O seulement des dents, et qu'on voulût conduire la roue O par la roue O′, ce seraient toujours les flancs qui conduiraient les dents ; le frottement serait très-dur, et l'usure des profils très-rapide ; enfin l'arc-boutement serait toujours à craindre. Au contraire, en donnant à chaque roue des flancs et des dents, on conduit aussi facilement la première roue par la seconde, que la seconde par la première.

La nécessité d'éviter les arc-boutements justifie aussi la présence du jeu dans les engrenages ; car, supposons qu'il n'y ait aucun jeu : les deux côtés d'une dent seraient à la fois en contact avec les deux côtés d'un creux, et l'arc-boutement pourrait se produire à la pointe la plus éloignée de la ligne des centres.

135. L'engrenage à flancs peut être employé pour l'engrenage intérieur, mais alors il n'est pas réciproque.

Soient O et O′ les centres des circonférences primitives, et A leur point de contact.

Prenons le rayon O′A pour profil du flanc de la roue O′ ; nous trouverons le profil correspondant de la roue O, en faisant rouler dans le cercle OA un cercle décrit sur O′A comme diamètre ; le point A de ce cercle décrira l'épicycloïde cherchée AM ; de sorte que le côté gauche de la droite AO′ appartiendra au plein de la roue O′, et le côté droit de l'épicycloïde AM appartiendra au plein de la roue O ; c'est ce qu'indiquent les hachures. Essayons maintenant d'armer la roue O′ de dents et la roue O de flancs ; le flanc de la roue O sera encore le rayon OA ; la dent de la roue O′ aura pour profil la courbe décrite par le point A du cercle construit sur le diamètre OA,

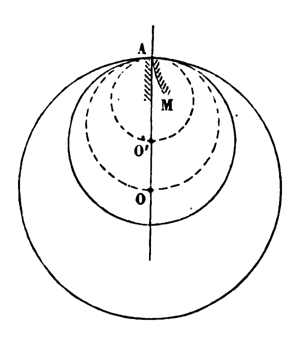


Fig. 192.

[1] La théorie du frottement dans les engrenages nous permettra plus tard de rendre compte de toutes ces particularités, que nous nous contentons d'indiquer ici.

roulant dans le cercle O'. On obtient ainsi pour nouveaux profils des lignes qui reviennent sur la région de la figure déjà occupée par les anciens profils ; la roue O devrait avoir pour profil de ses dents la courbe MA, prolongée par un flanc revenant dans la direction AO. Ces nouvelles lignes peuvent être construites géométriquement, mais elles ne peuvent servir de limite entre le plein et le vide, parce qu'il ne reste plus de place libre à affecter aux pleins de la seconde construction après qu'on a achevé la première.

Si la petite circonférence O' avait un diamètre moindre que le rayon OA de la grande, l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence de diamètre OA, roulant sur la circonférence O', serait extérieure à O', et ne pourrait engrener avec le flanc AO.

En résumé, l'engrenage intérieur ne peut être réciproque ; l'une des deux roues, la grande, O, qui reçoit les dents, est la roue menante ; l'autre, O', la petite, qui reçoit les flancs, est la roue menée.

136. L'engrenage à flancs peut être aussi appliqué au cas particulier de la crémaillère ; on peut considérer ce cas comme celui de l'engrenage de deux roues, dont l'une serait de rayon infini ; c'est la limite entre l'engrenage intérieur et l'engrenage extérieur. La crémaillère résout le problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, ou réciproquement.

Supposons que la circonférence O se soit changée en une droite CD, tangente au point A à la circonférence primitive O'.

Si c'est la droite CD qui doit mener la circonférence O', on prendra pour flancs de la roue O' des rayons issus du point O'; les dents de la crémaillère CD s'obtiendront en faisant rouler sur la *droite primitive* CD, la circonférence décrite sur O'A comme diamètre ; dans ce mouvement, le point A décrit une cycloïde AM.

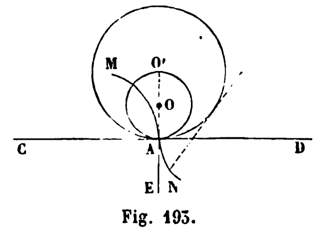


Fig. 193.

Pour donner ensuite la réciprocité à l'engrenage, on prendra pour flancs de la crémaillère des droites AE, perpendiculaires à CD, et on trouvera les dents

correspondantes de la roue O′ en faisant rouler la tangente CD sur le cercle O′; le point A décrit dans ce mouvement une développante AN du cercle de rayon O′A.

ENGRENAGE A DÉVELOPPANTES DE CERCLE.

137. L'engrenage à développantes de cercle est le système le plus parfait d'engrenage.

Soient O, O′ les centres de circonférences primitives, A leur point de contact sur la ligne OO′. Par le point A menons une droite PP′ quelconque. Des points O et O′ abaissons les perpendiculaires OP, O′P′ sur cette droite, et décrivons ensuite des circonférences des points O et O′ comme centres avec OP, O′P′ pour rayons. La droite PP′ sera une tangente commune à ces deux circonférences.

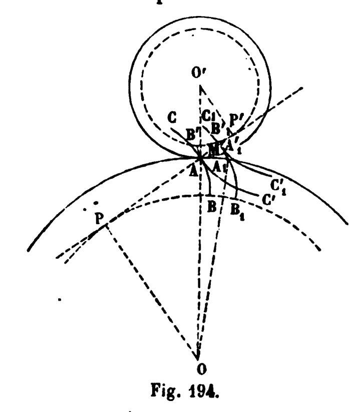


Fig. 194.

Cela posé, décrivons la développante BAC du cercle OP en la faisant passer au point A; décrivons de même la développante B′AC′ du cercle O′P′ en la faisant passer au point A. Les deux courbes BAC, B′AC′ attachées l'une à la roue O, l'autre à la roue O′, pourront engrener ensemble. En effet, faisons tourner la roue O, dans le sens du mouvement, d'un angle quelconque AOA_1; la roue O′ avançant en même temps d'un angle $A'_1O'A$; ce mouvement simultané amène le point B en B_1 sur la circonférence auxiliaire OP, et le point B′ en B'_1 sur la circonférence O′ P′. On a les proportions

$$\frac{BB_1}{AA_1}=\frac{OP}{OA}, \qquad \frac{B'B'_1}{AA'_1}=\frac{O'P'}{O'A};$$

or $\frac{OP}{OA} = \frac{O'P'}{O'A'}$; de plus, les arcs AA_1, AA'_1 sont égaux entre eux, comme arcs décrits en même temps par les circonférences primitives ; donc enfin $BB_1 = B'B'_1$. Les développantes BAC, B'AC' prennent donc, par suite du mouvement commun des deux roues, les positions B_1MC_1, $B'_1MC'_1$ qui se touchent sur la droite PP' en un point M éloigné du point A d'une longueur égale aux arcs BB_1, $B'B'_1$ pris sur les circonférences auxiliaires.

Le point de contact des deux profils en prise se déplace donc le long de la droite PP', et cette droite reste constamment normale aux deux profils en prise dans une position quelconque des deux roues conjuguées.

Les principaux avantages du tracé par développantes de cercle sont les suivants :

1° Les profils sont déduits, sur la roue O, d'une construction dans laquelle on ne fait intervenir que la circonférence OP; sur la roue O', d'une construction dans laquelle on ne fait entrer que la circonférence O' P'. Si donc on convient d'adopter pour tous les engrenages une même inclinaison de la droite PP' sur la ligne des centres, un angle de 75° par exemple, on pourra faire engrener ensemble deux roues dentées à développantes de cercle, quels qu'en soient les rayons, pourvu que les pas soient les mêmes. La même facilité n'existait pas avec les systèmes d'engrenage à flancs ou à fuseaux ; il fallait, avec ces systèmes construire spécialement l une des roues pour engrener avec l'autre.

2° La poussée mutuelle qu'exerce une des roues sur la roue conjuguée est appliquée au point de contact des deux profils, et, abstraction faite du frottement, elle est normale aux deux profils qui sont en prise ; dans l'engrenage à développantes, elle est donc toujours dirigée suivant la droite PP', laquelle a une position constante ; il résulte de là que dans ce système d'engrenage, la pression mutuelle exercée par une roue sur l'autre ne subit pas les mêmes variations d'intensité que dans les autres systèmes, où la direction de cette force pivote autour du point A pendant que les roues avancent d'un pas.

3° L'usure des profils qui glissent l'un sur l'autre est sensiblement proportionnelle à la pression mutuelle ; si donc la pression est à peu près constante, l'usure sera aussi à peu près partout la

même, de sorte que les profils s'useront parallèlement ; le profil modifié sera donc la même développante de cercle que le profil primitif, de sorte que les conditions géométriques de l'engrenage ne sont pas modifiées par l'usure.

ENGRENAGE SANS FROTTEMENT DE WHITE.

138. L'engrenage de White a pour but de faire engrener une roue avec une autre roue, sous la condition que le point de contact des deux dents en prise soit constamment situé sur la ligne des centres. S'il en est ainsi, le glissement est constamment nul, et le travail du frottement toujours égal à zéro.

Pour remplir ces conditions il suffit de multiplier à l'infini le nombre des dents, de manière à réduire le pas à une longueur infiniment petite. Voici comment White est parvenu à réaliser cette disposition qui, au premier abord, ne paraît pas admissible dans la pratique.

On ne pouvait pas placer une infinité de dents les unes à côté des autres le long des circonférences primitives et dans le plan même de ces circonférences; White les a réparties pour ainsi dire sur les diverses sections droites du cylindre formant la roue O, en plaçant leurs racines le long d'une ligne AB arbitrairement tracée sur la surface convexe de ce cylindre. Pour trouver la ligne correspondante qui servira de base aux dents de la roue O′, développons sur son plan tangent la surface du cylindre AO à partir de l'arête projetée en A et enroulons-la ensuite autour du cylindre O′. La ligne AB, par suite de cette déformation, ira former une ligne AB′ sur la surface du second cylindre primitif. Les deux courbes AB, AB′, ainsi construites, auront la propriété de se rencontrer toujours en un point de la génératrice AA′ de contact des deux cylindres, lorsque ceux-ci prendront le mouvement commun qu'on leur attribue. Si le cylindre AA′ avait une lon-

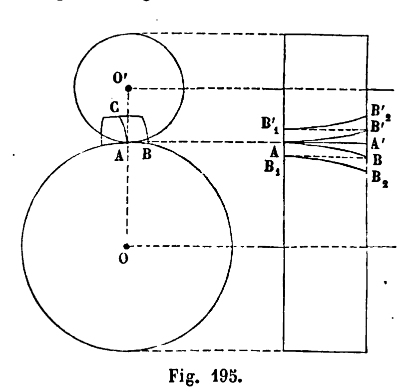


Fig. 195.

gueur suffisante, on pourrait en faire le tour entier avec une seule et même courbe continue AB: une hélice, par exemple, qui reviendrait au bout d'une spire à la génératrice AA'; mais sans augmenter ainsi la longueur du cylindre, on peut reporter les différentes parties de cette courbe sur le cylindre AB; il suffit de faire partir la ligne destinée à prolonger le tronçon AB, du point B, situé à l'autre extrémité du cylindre sur la même génératrice que ce point B; ce qui donnera un arc $B_1 B_2$ sur le premier cylindre, et un arc $B'_1 B'_2$ correspondant sur le second. On fera ainsi le tour des cylindres primitifs.

Prenons un profil complēt AC de forme arbitraire, mais normal au point A au cylindre primitif AO; puis faisons le glisser successivement le long des lignes AB, $B_1 B_2$... sur la surface du cylindre OA. Il engendrera dans ce mouvement une surface continue qui constituera la dent de la roue O; ce serait une dent continue si l'on supposait les différents arcs AB, B_1B_2.... réunis en prolongement les uns des autres sur la surface du cylindre suffisamment prolongé.

On prendra de même, pour profil du creux à pratiquer dans le cylindre O'A, un profil normal à la circonférence primitive, et on fera mouvoir ce profil le long des lignes AB', $B'_1 B'_2$,... pour engendrer le *creux continu* de la roue O'. La dent ne doit recevoir qu'une faible saillie sur la surface du cylindre, assez seulement pour accuser le premier élément normal au point A; le creux ne doit, de même, avoir que les dimensions nécessaires pour loger la dent à son passage dans le plan des axes des deux cylindres. Si donc on fait tourner le cylindre O, la dent conduira le creux, de telle manière que le point de contact se trouvera toujours sur la génératrice commune projetée en A, et se déplacera le long de cette génératrice. Le glissement relatif sera nul; chaque cylindre roulera sur l'autre, sans glissement des parties en contact, comme si la transmission avait lieu par simple adhérence.

L'engrenage de White a bien une infinité de dents; car si l'on coupe les deux cylindres par une série de plans normaux à leurs axes, les coupes présentent chacune, pour ainsi dire, un engrenage ordinaire; mais ces coupes, au lieu d'être empilées de manière à se couvrir mutuellement, sont placées en retraite graduelle l'une par rapport à l'autre, de sorte qu'une seule coupe forme, à un instant donné, l'engrenage où la prise des dents a lieu.

On voit aussi que dans l'engrenage de White, le contact des deux roues a lieu en un point unique, tandis que dans l'engrenage cylindrique ordinaire, le contact a lieu le long d'une génératrice rectiligne de la dent et du creux; cette considération seule montre que l'engrenage de White n'est applicable qu'à des transmissions délicates, dans

lesquelles les efforts exercés sur les roues sont peu énergiques. Les engrenages destinés à lever de lourds fardeaux ne sont jamais exécutés dans ce système.

L'engrenage de White s'applique aux engrenages intérieurs comme aux engrenages extérieurs.

ENGRENAGES CONIQUES OU ROUES D'ANGLE.

139. La théorie des engrenages coniques est calquée sur celle des engrenages cylindriques.

Soient OB, OB′ les deux axes concourants autour desquels doivent s'opérer les deux rotations, savoir, ω autour de OB, et ω′ autour de OB′. Nous supposerons que ces rotations s'opèrent en sens contraires, c'est-à-dire que l'axe de la première soit OB, et l'axe de la seconde le prolongement de OB′.

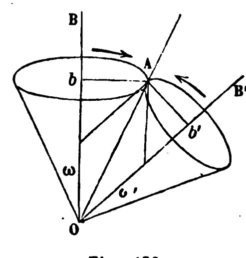


Fig. 196.

Nous commencerons par chercher dans le plan BOB′ un point A, tel qu'entraîné successivement dans le mouvement autour de OB, puis dans le mouvement autour de OB′, il ait la même vitesse linéaire en grandeur et en direction. Il faudra pour cela que l'on ait, en abaissant sur les axes les perpendiculaires Ab, Ab′,

$$Ab \times \omega = Ab' \times \omega',$$

équation qui définit une droite AO, diagonale du parallélogramme construit dans l'angle BOB′, avec des côtés proportionnels à ω et à ω′. Imaginons que cette droite AO tourne autour de OB, de manière à engendrer un cône droit à base circulaire dont OB soit l'axe; puis, qu'elle tourne autour de OB′, de manière à engendrer un second cône de révolution; ces deux cônes seront tangents tout le long de la génératrice OA; et si on leur imprime, autour de leurs axes et dans le sens des flèches, des vitesses angulaires égales ω et ω′, ils n'auront pas de glissement l'un sur l'autre, puisque les vitesses linéaires des

points en contact sont égales et dirigées dans le même sens au passage dans le plan BOB′.

On pourra donc transformer la rotation ω autour de OB en une rotation ω' autour de OB′ par la simple adhérence entre les deux cônes OB et OB′, comme on transforme (§ 122) la rotation autour d'axes parallèles par la simple adhérence entre deux cylindres.

Pour déduire de là l'engrenage conique, coupons les deux cônes par une surface sphérique ayant le point O pour centre et un rayon OA arbitraire.

Cette surface sphérique coupe les cônes suivant les deux cercles A*b*, A*b*′; cela posé, traçons sur la sphère, à partir du point A, une courbe quelconque qui représentera le profil du creux pratiqué dans la roue A*b*′; cherchons ensuite l'enveloppe des positions de cette courbe dans le mouvement relatif du cercle A*b*′ par rapport à A*b*; ce mouvement se réduit au roulement du premier cercle de la sphère sur le second; dans ce mouvement, chaque point du profil mobile décrit une courbe épicycloïdale sphérique, et l'enveloppe des positions de ce profil s'obtiendra en appliquant les mêmes principes qui nous ont servi pour la recherche de l'enveloppe des positions d'une figure plane de forme constante, mobile dans son plan suivant une loi donnée (§ 82).

Les courbes ainsi tracées serviront de directrices à des surfaces coniques ayant pour centre commun le point O, et dont l'une formera la surface de la dent d'une roue, et l'autre, la surface correspondante du creux de l'autre roue; les deux surfaces coniques se toucheront à un instant donné suivant une génératrice, et le plan élevé par cette génératrice perpendiculairement aux deux surfaces coniques en prise passera par la droite OA, génératrice de contact des deux cônes primitifs.

On pourra donc construire les engrenages coniques comme on construit des engrenages cylindriques, en effectuant sur la sphère les constructions analogues à celles qu'on effectuerait sur le plan, puis en prenant les figures résultantes pour bases de cônes, dont le sommet commun soit au point O.

Le prolongement de ces surfaces jusqu'au point O est purement fictif, car, dans la pratique, on limite les roues à deux sphères concentriques.

140. Les constructions à exécuter sur une surface sphérique ma-

térielle sont aussi faciles que les constructions sur un plan; les arcs de grand cercle y remplacent les lignes droites. Mais il serait difficile de réaliser matériellement la surface sphérique auxiliaire pour y tracer les profils des pleins et des creux des deux roues. Si la sphère était une surface développable, on pourrait l'appliquer sur le plan, et alors on n'aurait plus qu'à effectuer des constructions planes, qu'il serait facile de reporter ensuite sur la sphère. Ce procédé est inadmissible, puisque la sphère n'est pas applicable sur le plan. Mais nous n'avons pas besoin pour notre tracé de toute la surface de la sphère auxiliaire; les figures que nous avons à construire sont en effet réparties sur deux zones étroites de cette sphère, l'une ayant le cercle Ab, l'autre le cercle Ab' pour lignes moyennes; on peut remplacer ces zones, à cause de leur petite largeur, par les surfaces développables des cônes droits qui leur sont circonscrits ; on pourra donc dérouler les cônes sur le plan, et on aura, par ce procédé, développé approximativement, non pas la sphère entière, mais les régions de cette sphère utiles pour la solution du problème proposé.

Cette simplification a été imaginée par Tredgold.

Au point A, pris sur la génératrice de contact des cônes primitifs, élevons une perpendiculaire SS′ à OA dans le plan des deux axes. Elle coupera les axes en deux points S et S′ qui seront les sommets respectifs des cônes de révolution circonscrits à la sphère suivant les cercles Ab, Ab'. Ces cônes S et S′ seront tangents entre eux suivant leur génératrice commune SS′, car ils ont pour plan tangent commun un plan conduit par SS′ perpendiculairement au plan BOB′. Imaginons que le tracé de la base de l'engrenage dessiné sur la sphère, soit reporté sans altération sur les cônes qui ont une zone commune avec elle tout le long des parallèles Ab, Ab'. Considéré sur ces cônes aux environs de la génératrice SS′, le tracé ne différera en rien de celui d'un engrenage cylindrique qui aurait pour centres les points S et S′ et pour rayons

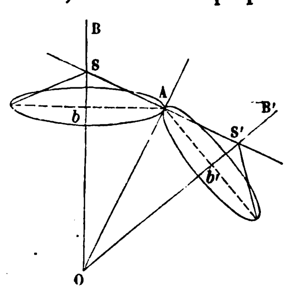


Fig. 197.

primitifs SA, S'A; par suite, on pourra substituer approximativement à l'engrenage conique l'engrenage cylindrique des deux secteurs primitifs de rayons SA, S'A, que l'on obtient en développant sur un plan l'ensemble des deux surfaces coniques S et S'.

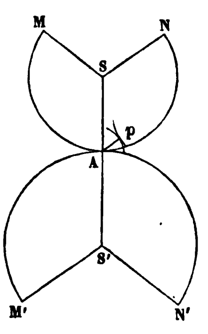


Fig. 198.

Décrivons sur un plan avec des rayons égaux à SA et à S'A deux cercles tangents en A; prenons sur les circonférences des arcs MAN, M'AN' respectivement égaux en longueur aux circonférences A*b*, A*b'*; partageons ensuite ces arcs, le premier en un nombre entier, m, de parties égales, le second, en m' parties égales, de manière qu'il y ait égalité entre ces parties; puis faisons le tracé de l'engrenage cylindrique, des portions de circonférences M'AN', MAN. Une fois ce tracé fait, il suffira d'enrouler les figures planes ainsi dessinées sur les cônes S et S' pour avoir approximativement les profils qui serviront de base aux surfaces coniques constituant les dents de l'engrenage demandé.

TRANSMISSION AUTOUR D'AXES NON CONCOURANTS ET NON PARALLÈLES.

141. *Double engrenage conique.* On se propose de transformer un mouvement de rotation ω, qui s'opère autour d'un axe OO, en un mouvement de rotation ω' autour de l'axe O'O'. Coupons ces deux axes par un troisième axe auxiliaire AB autour duquel nous imaginerons une rotation égale à ω''.

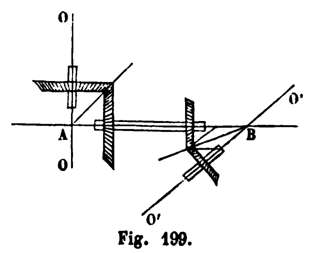


Fig. 199.

On pourra transformer d'abord la rotation ω en la rotation ω'' au moyen d'une roue d'angle ayant son sommet en A; puis la rotation ω'' en la rotation ω' au moyen d'une seconde roue d'angle ayant son sommet en B. Soient m, m'' les nombres de dents des roues d'angle en A; et m''_1, m' les

nombres de dents des roues d'angles en B; on aura les relations :

$$\frac{\omega''}{\omega}=\frac{m}{m''} \quad \text{et} \quad \frac{\omega'}{\omega''}=\frac{m_1''}{m'}.$$

Il en résulte

$$\frac{mm_1''}{m'm''}=\frac{\omega'}{\omega}.$$

C'est la relation à laquelle doit satisfaire le double engrenage; on devra trouver des nombres entiers qui vérifient cette équation en restant dans des limites pratiques convenables.

Engrenage hyperboloïde. Principe de la solution.

142. Proposons-nous de trouver une transformation directe de la rotation ω en la rotation ω'.

Soit OO' la perpendiculaire commune aux deux axes; prenons sur cette droite un point A quelconque que nous supposerons d'abord entraîné par la rotation ω, puis par la rotation ω'.

Le premier mouvement amène, dans un temps infiniment petit θ, le point A en un point B, à une distance $AB = \omega \times OA \times \theta$; l'élément AB est perpendiculaire à la fois à OO' et à OO_1.

Le second mouvement amène le point A au point B', dans une direction AB', normale à la fois à OO' et à $O'O'_1$, et à une distance $AB' = AO' \times \omega' \times \theta$; l'angle B'AB est égal à l'angle de l'axe OO_1 avec l'axe $O'O'_1$.

Fig. 200.

Il est donc impossible de trouver sur la droite OO' un point A tel qu'entraîné successivement par chaque rotation, il ait dans les deux cas la même vitesse linéaire en grandeur et en direction; quelles que soient les surfaces en contact, il y aura toujours entre elles un certain *glissement relatif* dont la mesure est donnée par l'arc BB', distance acquise, au bout d'un temps θ très-court, par les deux points qui étaient en coïncidence au point A, au commencement de cet intervalle de temps.

On peut du moins choisir le point A sur la droite OO′, de telle sorte que le glissement, BB′, soit le plus petit possible.

Le point A étant déterminé par cette condition, on connaîtra la direction BB′ de l'arc de glissement en construisant le triangle ABB′. Si par le point A nous menons une droite AA′ parallèle à BB′, cette droite, entraîné par le mouvement autour de OO_1, décrira un hyperboloïde de révolution, et entraînée par le mouvement autour de $O'O'_1$, décrira un second hyperboloïde. Ces deux surfaces se toucheront suivant la droite AA′, et quand on les fera tourner toutes deux avec les vitesses ω, ω', autour des axes OO_1, $O'O'_1$, elles glisseront l'une sur l'autre le long de la génératrice de contact. En d'autres termes, la génératrice de contact sera à chaque instant *l'axe de rotation et de glissement* du mouvement relatif d'une des surfaces par rapport à l'autre (§ 90 Rem); on peut donc construire cette génératrice en composant la rotation ω' autour de $O'O'_1$, avec une rotation égale et contraire à ω, autour de OO_1 (§ 99).

On pourra prendre sur les surfaces des deux hyperboloïdes deux zones conjuguées, c'est-à-dire deux zones comprises entre des *parallèles* menés sur chaque surface par deux points de la génératrice de contact AA′; puis on tracera sur ces deux zones une série de génératrices rectilignes équidistantes; ce seront les bases des dents dont on devra garnir chaque surface; ces dents seront de petites portions de surfaces saillantes, obliques sur les couronnes des roues, et qui glisseront les unes sur les autres dans le passage commun par la génératrice de contact des deux surfaces primitives.

Vis sans fin et engrenage hélicoïde.

143. Soit O une roue d'une épaisseur infiniment mince; cette roue, munie de dents RP, profilées suivant une développante du cercle OA, pourra engrener avec les flancs droits PQ d'une crémaillère BC. Supposons qu'à la crémaillère BC, on substitue la surface d'une vis à filet carré, et que PQ soit une génératrice de l'hélicoïde à plan directeur dont l'axe est la droite BC. Un déplacement longitudinal de l'hélicoïde, tel que celui que l'on donne à une crémaillère, équivaut à un déplacement angulaire de la surface autour de son axe BC; car ce déplacement angulaire a pour effet d'amener dans le plan de la figure une génératrice P′Q′, plus basse, par exemple, que la génératrice PQ; ce qui

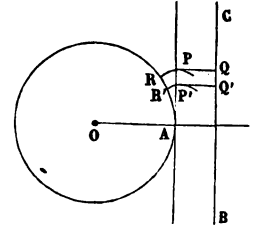


Fig. 201.

entraîne la rotation de la roue O, comme si la crémaillère s'était déplacée longitudinalement de la quantité PP'. On voit donc que cet engrenage hélicoïdal fournit un moyen de transformer un mouvement de rotation autour d'un axe CB, en un mouvement de rotation autour d'un axe O, perpendiculaire à CB.

Nous avons supposé la roue O sans épaisseur, ce qui est inadmissible en pratique ; la dent à profil de développante RP, a nécessairement une certaine épaisseur, et elle doit recevoir, par suite, dans le sens de l'épaisseur, l'obliquité demandée par la forme de la surface hélicoïdale avec laquelle elle doit être en contact aux environs du point P. Or le contact des deux surfaces a toujours lieu dans un même plan AP, parallèle à l'axe CB de l'hélicoïde et perpendiculaire au plan de la figure. Tous les points de contact successifs de l'hélicoïde avec la dent de la roue OA sont donc à une même distance de l'axe CB, et par suite, l'inclinaison sur le plan de la figure du plan tangent à l'hélicoïde en ces points P, P', est toujours la même. Les profils RP, R' P' doivent être touchés par ce plan tangent; il en résulte que la véritable forme de la dent RP est l'enveloppe d'un plan mobile, dont la trace sur le plan de la figure est tangente à la développante RP, et qui fait avec ce plan un angle constant, égal à l'inclinaison sur le même plan de l'hélice qui passe au point P. La surface enveloppe de ce plan mobile, est un hélicoïde développable dont l'arête de rebroussement est une hélice tracée sur le cylindre OA. On ne donne du reste à la dent qu'une faible épaisseur.

La vis sans fin peut être construite de telle sorte que la vis mène la roue sans que la roue mène la vis ; c'est ce qui arrive si le pas de l'hélice est suffisamment petit.

Si, au contraire, le pas de l'hélice est très-allongé, la roue peut mener la vis sans que la vis puisse mener la roue ; on emploie un engrenage de cette nature dans le régulateur à ailettes du tourne-broche.

Enfin, pour des valeurs moyennes du pas, l'engrenage est réciproque.

La recherche des conditions de transmission appartient à la théorie du frottement dans les machines.

On peut transformer l'engrenage de la vis sans fin en un engrenage de deux roues à axes rectangulaires non concourants. Imaginons pour cela qu'on augmente le rayon de la vis, en en réduisant la longueur et en multipliant le nombre des filets hélicoïdaux ; on obtiendra par cette transformation deux roues à dents hélicoïdales engrenant l'une avec l'autre, par des dents tracées obliquement aux couronnes.

RENSEIGNEMENTS PRATIQUES SUR LES ENGRENAGES.

144. Le pas S d'un engrenage se calcule par la formule

$$S = \frac{2\pi R}{m},$$

m étant le nombre de dents d'une roue, et R le rayon de sa circonférence primitive.

La roue conjuguée devra donner la même valeur de S :

$$S = \frac{2\pi R'}{m'}.$$

Sur chaque roue, le pas S est la somme du *plein* et du *creux*; le *creux* est égal au *plein* de la roue conjuguée, plus un *jeu*.

Les *pleins* des deux roues conjuguées peuvent n'être pas égaux ; cela arrive si les dents des deux roues ne sont pas formées de la même matière : les dents en fer demandent moins de largeur que les dents en bois.

Le *jeu* doit varier avec la nature des matières employées pour les dents, et aussi avec le soin apporté à l'engrenage : on le fait du $\frac{1}{10}$ au $\frac{1}{20}$ du plein pour les engrenages à dents métalliques, et du $\frac{1}{6}$ au $\frac{1}{10}$ pour les engrenages à dents en bois.

Dimensions des dents. On calcule les dimensions des dents par les formules suivantes :

Soit P la pression mutuelle qui s'exerce entre deux dents en prise ;

K, un coefficient constant ;

L, la saillie totale de la dent, mesurée à partir du fond du creux ;

b, l'épaisseur de la dent, mesurée dans le sens des génératrices du cylindre ;

h, la largeur, ou le plein, mesuré sur la circonférence primitive.

P est exprimé en kilogrammes; L, b, h, sont exprimés en mètres.

1° Les quantités L et h sont liées entre elles par la formule :

$L = 1,2\,h$ si l'engrenage est soumis à de grandes charges ;

$L = 1,5\,h$, si l'engrenage est soumis à des charges médiocres.

2° On a de plus l'équation

$$PL = Kbh^2$$

Dans cette équation, on peut faire $K = 250,000$ si les dents sont en fer, et $K = 145,000$ si elles sont en bois.

3° La valeur de b doit être comprise entre $3h$ et $6h$, suivant que P est plus ou moins grand.

On a dressé des tables pratiques donnant ces dimensions.

Dimensions de la jante. La jante des roues d'engrenage en fer reçoit une largeur égale à l'épaisseur b des dents ; et une épaisseur (dans le sens du rayon) égale à la largeur des dents, h, ou bien aux $\frac{2}{3}$ de cette largeur si l'on ajoute une nervure intérieure. Si la roue est exposée à des chocs, on fait saillir la jante latéralement aux dents, de manière à leur fournir un appui à leurs deux extrémités.

Pour les roues en bois, les dents sont des aluchons implantés dans la jante, laquelle a plus d'épaisseur que les dents. L'aluchon traverse la jante, et déborde à l'intérieur ; on l'y fixe solidement au moyen de coins en bois.

Dimensions des bras. Le nombre des bras de la roue dépend de son diamètre ; pour les petites roues au-dessous de $1^m,30$ de diamètre, on met quatre bras.

On en met 6, pour un diamètre variable de $1^m,30$ à $2^m,50$.
8, — de $2^m,50$ à $5^m,00$.
10, — de $5^m,00$ à $7^m,00$.

La section du bras est en général une croix, dont les dimensions vont en diminuant du moyeu à la jante. Les saillies latérales de la croix se fondent avec la nervure intérieure de la jante, s'il existe une telle nervure.

Le calcul de la section de ces pièces est un problème de la *résistance des matériaux.*

TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE ALTERNATIF EN UN MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU. — BIELLE ET MANIVELLE.

145. La tige T d'un piston, mobile dans un cylindre, est animée d'un mouvement de va-et-vient le long d'une droite OX ; elle est

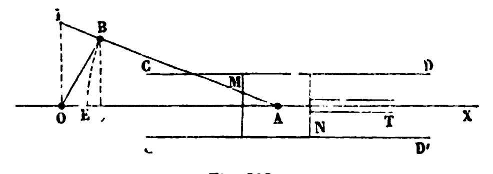


Fig. 202.

guidée dans ce mouvement par deux glissières fixes CD, C'D', parallèles à la droite OX, et entre lesquelles la *coquille* MN, attachée

invariablement à la tige T du piston, a la liberté de glisser à frottement doux.

Pour transmettre le mouvement à un arbre tournant, dont l'axe est projeté en un point O de la droite OX, on se sert d'une *bielle* AB, dont l'extrémité A est articulée à la coquille et dont l'autre extrémité B s'articule en un point B du rayon OB fixé à l'arbre. Le rayon OB prend le nom de *manivelle*. Il porte en B un *bouton* cylindrique dont l'axe est parallèle à l'arbre O, et qui passe dans un *œil* ménagé à l'extrémité de la bielle.

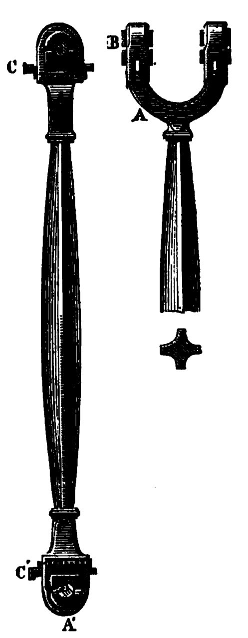


Fig. 205.

A, tête à fourche, embrassant l'extrémité du balancier ou la coquille de piston. A', tête articulée au bouton de la manivelle. B, B', axes passant dans les paliers. C', C', clavettes de serrage, appuyant d'un côté sur les coussinets, de l'autre sur des contre-clavettes fixes.

Nous avons déjà étudié (§ 81) cette transformation de mouvement, et reconnu que la vitesse V du point A était liée à la vitesse angulaire ω de l'arbre par la relation

$$V = OI \times \omega,$$

OI étant la longueur comprise sur une perpendiculaire à OX entre le point O et la rencontre de la direction AB de la bielle.

Si du point A comme centre avec AB pour rayon nous décrivons un arc de cercle pour rabattre AB de A en E sur la droite AD, le point E aura un mouvement égal à celui du point A puisque ces deux points sont constamment à la même distance l'un de l'autre sur la droite qu'ils parcourent tous deux. Or abaissons du point B une perpendiculaire B*b* sur OA. La distance *b*E serait infiniment petite du second ordre si l'angle BAO, qui mesure l'obliquité de la bielle, était infiniment petit. Si donc la bielle est suffisamment longue, on pourra sans grande erreur négliger *b*E devant la longueur AB, et confondre le mouvement

du point E, ou, ce qui revient au même, le mouvement du point A avec le mouvement du point *b*, projection du bouton de la manivelle ·· le diamètre OX. L'erreur commise est nulle aux *points morts ;* aximum quand la manivelle fait un angle droit avec la droite OX (fig. 204) ; car c'est alors que l'angle BAO est le plus grand possible. En général on donne à BA une longueur égale à 5 fois BO. Dans ces conditions le maximum OE de l'erreur qui consiste à confondre le mouvement du point A avec le mouvement de la projection du point B est donné rigoureusement par l'équation

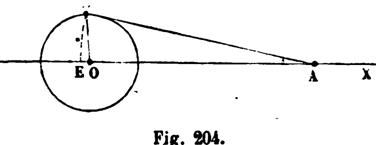


Fig. 204.

$$OE \times (2AB - OE) = \overline{OB}^2$$

et approximativement par l'équation

$$OE \times 2AB = \overline{OB}^2 :$$

On a donc à peu près

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OB}{2AB}.$$

Si donc

$$\frac{OB}{AB} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{OE}{OB} \text{ sera à peu près égal à } \frac{1}{10}, \text{ et } \frac{OE}{AB} \text{ à } \frac{1}{50}.$$

La longueur de la manivelle OB est rigoureusement égale à la moitié de la course du piston, ou de l'intervalle entre les deux positions extrêmes du point mobile A. Lorsque le bouton de la



Fig. 205.

manivelle passe au *point mort* B_1, la bielle et la manivelle sont en prolongement l'une de l'autre, et par suite la distance OA_1 du

point mobile A au point fixe O est égale à OB + BA ; lorsque la manivelle a accompli une demi-révolution et que le bouton passe au second *point mort* B_2, la bielle revient en retour de la manivelle et le point A se trouve alors en A_2 à une distance du point O égale à OB — BA ; la course du piston $A_1 A_2$ est donc égale à la différence

$$(OB + BA) - (OB - BA), \quad \text{ou à} \quad OB \times 2.$$

Cette relation est rigoureuse, et elle est indépendante de la longueur de la bielle.

146. Aux points morts, le piston, parvenu à l'une des extrémités de sa course, n'agit plus sur la bielle, et ne contribue plus à imprimer un mouvement de rotation continu à l'arbre O. Le mouvement une fois commencé peut se prolonger, comme nous le verrons plus tard, en vertu de la propriété connue sous le nom d'*inertie de la matière;* la manivelle et la bielle cessent alors d'avoir toutes deux une même direction, et la transmission du mouvement redevient possible. Il n'en est pas moins vrai que si la machine, à l'instant où l'on veut la mettre en train, était à l'un des points morts, les efforts du piston sur la bielle res-

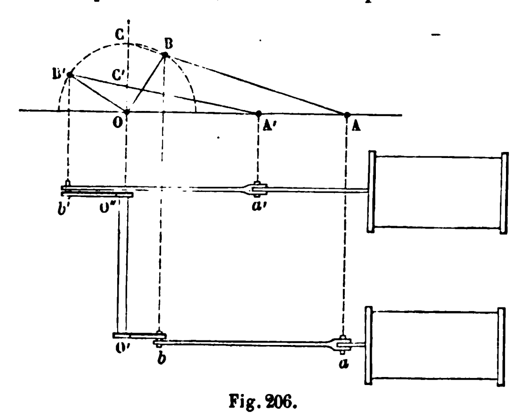


Fig. 206.

teraient sans effet ; pour déterminer le mouvement de l'arbre dans un sens plutôt que dans le sens opposé, il faut que le mécanicien agisse sur la manivelle dans le sens voulu et lui donne un dépla-

cement qui permette à la transmission de s'opérer. C'est cette opération qu'on appelle *abattage* dans les machines à vapeur à cylindre unique. La nécessité de l'abattage est évitée dans les machines à deux cylindres (fig. 206). Chaque cylindre a son piston, sa bielle et sa manivelle. L'arbre tournant est alors lié à la fois à deux manivelles OB, OB′, que l'on place à angle droit l'une sur l'autre; lorsque l'une passe à un point mort, l'autre, qui a sur la première une avance ou un retard de 90°, se trouve avoir tout son effet, de sorte que la transmission est toujours assurée, soit par les deux manivelles, soit par l'une des deux.

Les vitesses des deux pistons ne sont pas les mêmes aux mêmes instants. Si ω représente la vitesse de rotation de l'arbre O, la vitesse linéaire v du piston correspondant à la bielle AB est égale à $OC \times \omega$; tandis que la vitesse v' du piston correspondant à la bielle A′B′ est $OC' \times \omega$.

La transmission par bielle et manivelle peut s'opérer dans les deux sens. Lorsque la transmission est double, et que les deux manivelles sont calées à angle droit, on renverse le mouvement de rotation de l'arbre en changeant à la fois le sens de la marche des deux pistons.

La transmission par bielle et manivelle est aussi *réciproque;* c'est-à-dire que si l'on fait tourner l'arbre de rotation dans un



Fig. 207.

sens, le mouvement alternatif du piston en résulte sans aucune ambiguïté. Dans ce cas les points morts de la manivelle sont sans inconvénient.

Elle fournit donc un moyen de transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif.

147. L'*excentrique à collier* (fig. 207) est une transformation du même genre, dont la théorie géométrique se ramène à celle de la bielle et de la manivelle. Sur un arbre O, est calé un cercle dont le centre C est situé en dehors de l'axe O, et dont la circonférence enveloppe entièrement cet arbre; c'est cette circonférence massive D, qu'on appelle *excentrique*. Au pourtour du cercle est placé un *collier* ou *bague* AA, qui enveloppe tout l'excentrique et à l'intérieur duquel cette pièce peut glisser à frottement doux. Le collier est attaché à des barres droites A′ B, entre-toisées l'une à l'autre, et qui se réunissent en un même point B, mobile sur une droite Oy, ou sur un arc de cercle de faible courbure qu'on peut confondre sans erreur avec une droite, dont le prolongement passe par le point O, centre de la rotation de l'arbre.

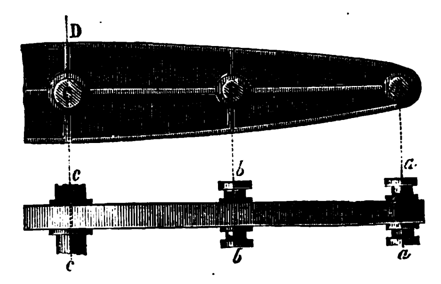
Joignons le point O au point C et le point C au point B; ces longueurs restent constantes dans le mouvement, car OC est une droite appartenant au système invariable de l'arbre et CB est la distance constante du point B, qui fait partie du système des barres d'excentrique, au point C, centre du cercle formé par le collier AA. Tout se passe donc comme si une manivelle OC, égale à l'excentricité, menait la bielle CB; le mouvement circulaire continu de l'excentrique imprime donc au point B le long de sa trajectoire un mouvement alternatif dont l'amplitude est égale à 2OC.

Cette transformation de mouvement n'est pas réciproque, parce que la poussée qu'on exercerait au point B pour faire tourner l'excentrique produirait une augmentation du frottement de a bague contre l'excentrique et ne pourrait faire tourner cette pièce. L'excentrique a, comme nous le verrons plus tard, l'inconvénient d'accroître beaucoup le *travail du frottement* par rapport à ce qu'exige l'emploi d'une bielle et d'une manivelle; malgré cette infériorité, l'excentrique est très-employé dans les machines parce que le calage de cette pièce sur l'arbre tournant évite les coudes, qui seraient nécessaires pour le passage des bielles. On peut regarder l'excentrique comme un système particulier de manivelle dans lequel le bouton aurait été augmenté en diamètre de manière à envelopper l'arbre tournant lui-même.

TRANSMISSIONS DU BALANCIER.

148. On appelle *balancier*, dans les machines à vapeur à cylindre vertical, une pièce oscillante, ou animée d'un *mouvement circulaire alternatif*; ce mouvement lui est communiqué à une extrémité par le piston de la machine, et il le transmet par l'autre extrémité à un arbre tournant, auquel on doit communiquer un *mouvement circulaire continu.*

Les transmissions du balancier comprennent donc une transformation du mouvement rectiligne alternatif en circulaire alternatif, et une transformation du mouvement circulaire alternatif en circulaire continu.



C, *cc*, axe de rotation du balancier.
B, *bb*, et A, *aa*, axes auxquels s'articulent les bielles et les tiges mises en mouvement par le balancier.

Fig. 208.

La première s'opère au moyen de l'appareil appelé *parallélogramme articulé*; la seconde au moyen de la bielle et de la manivelle[1].

PARALLÉLOGRAMME DE WATT.

149. Soient OA, O'A' (fig. 209) deux droites égales, mobiles dans le plan de la figure, la première autour du point O, la seconde autour du point O'; ces deux droites sont parallèles dans leur position moyenne; la première s'en écarte dans un sens et dans l'autre, d'un angle BOA = COA, et elle possède un mouve-

[1] Voir plus loin, §§ 152 et 153, transmission par bielle et manivelles inégales.

ment circulaire alternatif qui la fait passer de la position extrême OB à l'autre position extrême OC.

Le point A de la droite OA est lié au point A′ de la droite O′A′ par une droite AA′ de longueur constante; le mouvement de la droite OA définit donc complétement le mouvement de la droite O′A′. On trouvera, par exemple, les positions extrêmes O′ B′ et O′ C′, de la droite O′A′, en cherchant les intersections B′ et C′ de l'arc de cercle C′A′B′, décrit par le point A′ autour du point O′, et des arcs décrits des points B et C comme centres, avec un rayon égal à AA′.

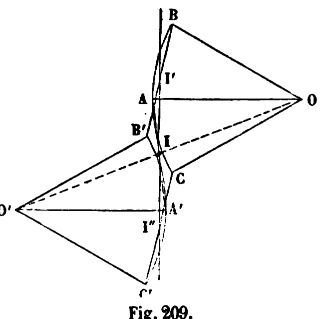


Fig. 209.

Le lieu géométrique décrit par le milieu de la droite de jonction des points mobiles A et A′ est une courbe I′ II″, qui a un *centre* à l'intersection de la droite AA′ et de la droite OO′, et qui diffère très-peu d'une ligne droite si les proportions de la figure sont convenablement choisies.

La courbe passant par son centre a en effet une *inflexion* au point I. De plus, on peut prévoir qu'elle a une courbure très-peu prononcée; car les courbes décrites par les extrémités de la droite finie AA′ étant des arcs de cercles égaux, mais orientés en sens contraire l'un de l'autre, la courbe décrite par le point milieu de la droite AA′ a pour ainsi dire une courbure moyenne entre ces deux courbures égales et opposées; sa courbure est donc voisine de zéro, et elle est tout à fait nulle au point où elle coupe la droite OO′. En résumé, le mouvement du milieu de la droite AA est à peu près rectiligne.

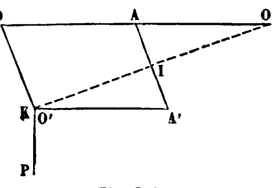


Fig. 210.

Watt s'est servi de cette propriété, qui n'est vraie que d'une manière approximative, pour établir la liaison entre la tête du piston de la machine à vapeur et le balancier.

Il a remarqué que si l'on prolonge OA (fig. 210, 211 et 212) d'une quantité AD égale à OA, et que l'on complète le parallélogramme ADKA', le point K se trouve toujours en ligne droite avec

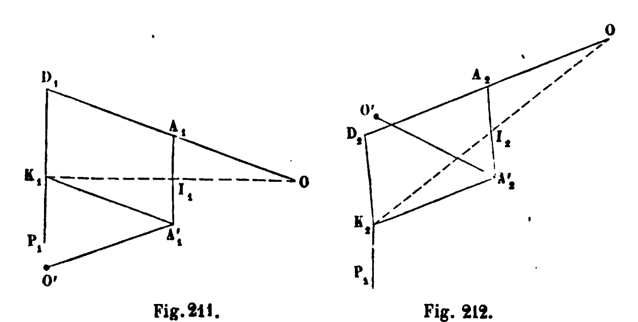


Fig. 211. Fig. 212.

les points O et I, dans toutes les positions du parallélogramme, et à une distance OK du point O double de la distance OI.

La ligne décrite par le sommet K de ce parallélogramme est donc homothétique à la ligne décrite par le point I; si celle-ci se confond sensiblement avec une droite, l'autre se confondra de même avec une droite parallèle à la première. Watt s'est donc servi du point K, sommet du parallélogramme articulé, pour y attacher la tête du piston P; dans la position moyenne, le

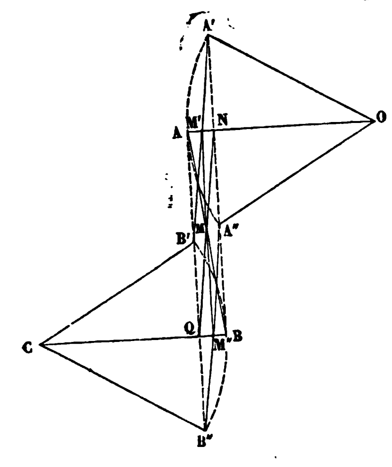


Fig. 213.

point O', centre du *contre-balancier*, O'A', qui assure le mouvement du point A', coïncide en projection avec le sommet K, point d'attache de la tige du piston. Le point I, situé au milieu de la bride AA', et animé comme le point K d'un mouve-

ment alternatif sensiblement rectiligne, mais de course deux fois moindre, sert à attacher la tige de l'une des pompes de la machine.

150. Voici les proportions prises par Watt pour le tracé de cet appareil (fig. 213):

OA′, OA″, positions extrêmes du balancier;

OA, position moyenne.

L'angle A′OA est égal à 18° 55′ 28″; la longueur OA est à la demi-corde A′ N dans le rapport de 37 à 12. Le contre-balancier est placé de telle sorte que son extrémité B, dans la position moyenne, soit située sur la corde A′A″ prolongée. Le point M, qui décrit la ligne sensiblement droite, est au milieu de la bielle de jonction AB. Ce point, dans les positions extrêmes de la figure, se trouve en M′ et en M″, au milieu des flèches, AN, QB, des arcs décrits par les extrémités des deux balanciers. Watt prenait la bielle AB égale à la corde A′A″, ou au moins aux $\frac{6}{7}$ de cette corde.

PARALLÉLOGRAMME POUR BATEAUX.

151. Dans les bateaux à vapeur à palettes, on ne peut pas

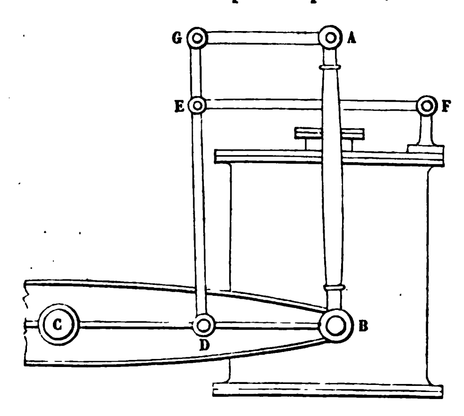


Fig. 214.

placer le balancier au-dessus des cylindres, parce que cette pièce

a un poids très-lourd, qui compromettrait la stabilité du bâtiment.

La tige du piston (fig. 214) fait mouvoir une potence aux extrémités de laquelle sont attachées deux bielles descendantes AB (la seconde est cachée derrière la première).

Le point A est donc animé d'un mouvement rectiligne alternatif suivant la verticale et le point B d'un mouvement circulaire alternatif autour du centre C. Une tige rigide DE, articulée en D avec le balancier CB, et en E avec le contre-balancier EF, porte en un point G de son prolongement une bride GA qui la rattache invariablement à la tête du piston ; on dispose des proportions de la figure de manière que le point G décrive à très-peu près une droite verticale. La bride GA, toujours égale et parallèle à DB, maintient donc la tige du piston sur la verticale, malgré les actions exercées obliquement par la bielle AB, lorsque la figure n'est pas dans sa position moyenne.

TRANSMISSION PAR BIELLE ET MANIVELLES INÉGALES.

152. Soient A et B les projections de deux axes parallèles ; une *manivelle* Ab, mobile dans le plan de la figure, est assujettie à tourner autour de l'axe A ; une autre *manivelle* Ba, est assujettie à tourner autour de l'axe B ; les extrémités a et b sont réunies l'une à l'autre par un lien rigide ou *bielle, ab*.

Appelons ω la vitesse angulaire de la première manivelle autour de l'axe A, et ω' la vitesse angulaire de la seconde autour de l'axe B, ces deux vitesses étant prises à un même instant, et cherchons d'abord le rapport des vitesses angulaires ω et ω'.

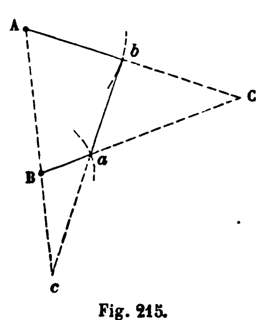


Fig. 215.

Dans son déplacement autour de A, le point b décrit un arc de cercle infiniment petit, normal à Ab, et égal à $Ab \times \omega\theta$, θ étant la durée infiniment petite du déplacement.

Dans le même temps θ, le point a décrit un arc infiniment petit, perpendiculaire à Ba, et égal à $Ba \times \omega'\theta$.

Les directions Ab, Ba, sont normales aux lieux décrits simul-

tanément par les points a et b du lien rigide ab; le point de rencontre C de ces deux directions est donc le centre instantané du système solide mobile ab.

Si l'on divise les vitesses linéaires des points a et b par les distances bC, aC, de ces points au centre commun de rotation, on obtiendra la vitesse angulaire du système ab; les deux divisions doivent donc donner le même résultat, et par suite on a l'égalité

$$\frac{Ab \times \omega}{Cb} = \frac{Ba \times \omega'}{Ca},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{Ab \times Ca}{Cb \times Ba}.$$

Prolongeons la direction de la bielle jusqu'à sa rencontre en c avec la droite passant par les centres A et B. Le triangle ABC a ses trois côtés rencontrés par la transversale bac, et l'on a l'égalité

$$\frac{Ab \times Ca \times Bc}{Cb \times Ba \times Ac} = 1;$$

donc

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{Ac}{Bc}.$$

Le rapport des vitesses angulaires est ainsi égal au rapport des segments Ac, Bc, interceptés sur la ligne des centres par la direction de la bielle. La formule est générale, pourvu que l'on attribue aux segments Ac, Bc des signes convenables d'après le sens qu'ils ont sur la droite AB, et que les vitesses angulaires ω, ω' soient de même considérées comme ayant le même signe ou des signes contraires, suivant qu'elles correspondent à des rotations dans le même sens ou en sens opposé.

Lorsque les deux manivelles sont égales, et que la bielle ab a une longueur égale à la distance AB des centres, la droite ab est constamment parallèle à AB, et par suite le point c est infiniment éloigné. La formule donne alors

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1,$$

ce qu'il est facile de reconnaître directement. On a alors la transmission par *bielle d'accouplement*, que l'on emploie pour rattacher l'une à l'autre les roues motrices d'une locomotive.

153. Nous allons déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux manivelles A*b*, B*a*, puissent faire chacune un tour entier autour des centres A et B. Pour cela, commençons par chercher s'il y a des limites à l'excursion des points *b* et *a* sur les circonférences que ces points décrivent dans leurs mouvements simultanés.

Du point B comme centre, avec un rayon égal en valeur absolue à (fig. 216) la différence *ab* — B*a*, décrivons un arc de cercle ; si cet arc rencontre la circonférence lieu du point *b* en deux points b' et b'_1, le bouton *b* de la manivelle A*b* ne pourra pas pénétrer dans l'arc $b'b'_1$ compris entre ces deux points ; car pour tout point *m* de cet arc, on aurait $Bm < Bb'$, c'est-à-dire que dans le triangle B*ma*, formé par le centre B, l'extrémité *m* de la bielle et le point mobile *a*, le côté B*m* serait moindre que la différence *ab* — B*a* des deux autres côtés, ce qui est impossible.

Du point B comme centre avec un rayon égal à *ab* + B*a*, décrivons un second arc de cercle ; si cet arc coupe le cercle décrit par le point *b* en deux points b'', b''_1, ces points représenteront de même les limites de l'excursion possible du point *b*. Autrement on obtiendrait un triangle B*an* dans lequel le côté B*n*, plus grand que Bb'', serait plus grand que la somme des deux autres côtés, laquelle est toujours égale à *ab* + B*a*.

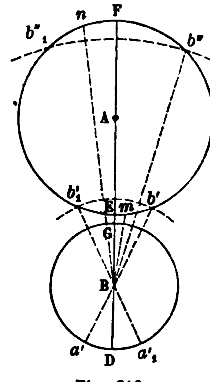


Fig. 216.

S'il en est ainsi, le point *b* est assujetti à parcourir soit l'arc $b''b'$, soit l'arc $b'_1b''_1$, et à osciller entre les deux extrémités de cet arc. C'est ce qui a lieu dans la transmission du balancier à l'arbre tournant d'une machine à vapeur.

On saura de même si l'excursion du point *a* est limitée sur la circonférence B*a*, en traçant du point A comme centre, d'abord avec un rayon égal à la somme *ab* + A*b*, puis avec un rayon égal en valeur absolue à la différence *ab* — A*b*, des arcs de cercle qui pourront couper en deux points, ou toucher en un seul point, ou ne pas rencontrer du tout la circonférence décrite par l'extrémité *a* de la manivelle B*a*.

Pour que le mouvement de rotation autour du centre A du plus grand cercle ne soit arrêté nulle part, il faut que quand le point b passe au point E de la ligne des centres, la bielle soit au plus égale à ED, et que quand le point b passe au point F, à l'autre extrémité du diamètre, la bielle soit au moins égale à GF. Car GF est la plus courte droite qu'on puisse mener du point F à la circonférence B, de même que ED est la plus longue droite qu'on puisse mener à cette circonférence à partir du point E. Appelons a la distance AB des centres, R, le rayon Ab, r le rayon Ba, et enfin l, la longueur de la bielle ; supposons $R > r$, ou au moins $R = r$. Il faudra qu'on ait à la fois, pour assurer la continuité de la rotation,

$$l = \text{ou} < (a + r - R)$$

et

$$l = \text{ou} > (a + R - r).$$

Ces conditions sont incompatibles avec la condition $R > r$; on ne peut y satisfaire qu'en supposant $R = r$ et $l = a$.

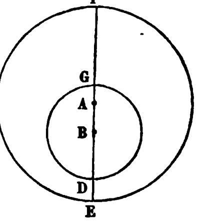


Fig. 217.

Il peut en être autrement lorsque le petit cercle est intérieur au grand (fig. 217). En effet, au moment où le point b passe au point E, la longueur l de la bielle doit être comprise entre ED et EG, puisqu'elle aboutit en un point de la circonférence GD; et quand le point b passe en F, elle doit être comprise entre FG et FD; c'est-à-dire que la longueur l doit satisfaire à la fois aux quatre inégalités

$$R - a - r < l < R - a + r$$

et

$$R + a - r < l < R + a + r.$$

Pour que ces conditions soient compatibles, il faut et il suffit que $r > a$; car alors la seconde limite inférieure, $R + a - r$, est au-dessous de la première limite supérieure, $R - a + r$, et on peut trouver entre ces deux limites des valeurs de l satisfaisant à la fois aux quatre inégalités.

En définitive, il y a deux cas seulement dans lesquels le mouvement des deux arbres tournants peut être indéfiniment prolongé dans le même sens :

1° $R = r$, $l = a$;

2° $R > r > a$, et $a > (R - r)$; cette dernière condition montre que le petit cercle est à l'intérieur du grand; l'inégalité $r > a$ indique de plus que le centre du grand cercle est à l'intérieur du petit. Alors la longueur l de la bielle doit être comprise entre les deux limites $R + (r - a)$ et $R - (r - a)$.

CAMES ET PILON.

154. La came est une partie saillante b adaptée à un arbre tournant, et destinée à soulever le *mentonnet* a d'un pilon ou d'un marteau, qui retombe quand la came cesse de le soutenir. Le mouvement de l'arbre, l'espacement des cames et la levée du pilon ou du marteau, doivent être réglés de telle sorte que la chute soit terminée avant que la came suivante soit en prise avec le mentonnet.

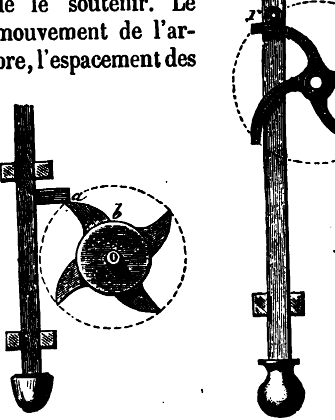


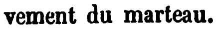
Fig. 218. Fig. 219.

On diminue les résistances en faisant passer la came à travers une fente pratiquée dans la tige du pilon (fig. 219) ; elle agit alors sur un rouleau r mobile autour de son axe; ou bien on fait passer la tige du pilon entre deux cames jumelles, qui agissent sur une même traverse passée dans l'axe de rotation. Ces diverses dispositions ont l'avantage d'éviter la poussée latérale exercée par la came sur le pilon et le frottement du pilon contre ses guides.

THÉORIE DES CAMES DES ARBRES TOURNANTS.

155. Une came C est fixée au pourtour de la circonférence d'un arbre tournant T, mobile autour de l'axe projeté en A (fig. 220). Le contour EF de cette came soulève un marteau H, mobile autour de l'axe projeté au point O, et le laisse retomber lorsque l'arbre tournant continue sa marche. Il résulte de là que le mouvement circulaire continu de l'arbre T produit pour le marteau H un mouvement circulaire alternatif dans lequel la came agit seulement pour soulever le marteau, et l'abandonne à son propre poids quand il doit retomber.

On demande les rapports des vitesses angulaires du marteau et de la came, à un moment quelconque de la période du soulèvement du marteau.



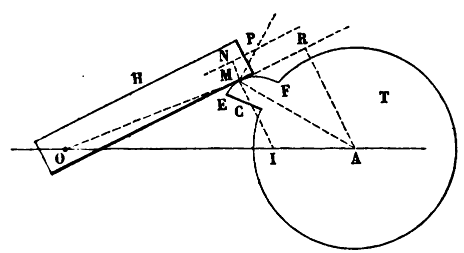


Fig. 220.

Soit M, à cet instant, le point de contact des deux pièces.

Appelons ω la vitesse angulaire de la came autour du point A et ω' la vitesse angulaire correspondante du marteau.

Dans un temps θ infiniment court, le point M, considéré comme appartenant à la came, décrit un arc élémentaire $MP = MA \times \omega\theta$, perpendiculaire au rayon AM.

Le même point M, considéré comme appartenant au marteau, décrit dans le même temps un arc élémentaire MN, égal à $OM \times \omega'\theta$ et perpendiculaire au rayon OM.

Les deux points qui, au commencement du temps θ étaient en coïncidence au point M, parviennent donc à la distance NP l'un de l'autre au bout de ce temps. L'arc NP est l'*arc de glissement* du

marteau sur la came (§ 126), et comme ces deux corps se touchent au point M, on doit admettre (en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier) que le glissement mutuel a lieu suivant la tangente commune, ce qui revient à dire que la direction de l'élément NP est parallèle à la tangente au point M, ou qu'elle est perpendiculaire à la normale commune MI aux deux profils en contact.

Il est facile de construire un triangle semblable au triangle infinitésimal MNP. Prolongeons OM, et du point A menons AR parallèle à MI. Le triangle MAR sera semblable au triangle MNP, comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires aux côtés de ce triangle : en effet MA est perpendiculaire à MP, MR à MN, et AR à NP; donc on a la suite de rapports égaux

$$\frac{MN}{MR} = \frac{MP}{MA} = \frac{NP}{AR}.$$

ou bien

$$\frac{OM \times \omega'\theta}{MR} = \frac{MA \times \omega\theta}{MA} = \frac{NP}{AR}.$$

La première égalité nous donne le rapport des vitesses angulaires

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{MR}{OM};$$

mais les droites IM et AR étant parallèles, nous avons aussi la proportion

$$\frac{MR}{OM} = \frac{IA}{OI},$$

et par suite

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{IA}{OI}.$$

Le rapport des vitesses angulaires des deux corps en contact est donc à chaque instant égal au rapport inverse des segments déterminés sur la ligne des centres par la normale commune aux deux profils en prise.

Le troisième rapport $\frac{NP}{AR}$ nous fait connaître la valeur de l'arc

de glissement ; nous avons en effet

$$NP = AR \times \omega\theta'.$$

Les triangles semblables OIM, OAR nous donnent

$$AR = MI \times \frac{OA}{OI};$$

mais de la proportion

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{IA}{OI}$$

on déduit

$$\frac{\omega' + \omega}{\omega} = \frac{OI + IA}{OI} = \frac{OA}{OI}.$$

Donc

$$AR = MI \times \frac{\omega' + \omega}{\omega},$$

et par suite

$$NP = MI \times (\omega' + \omega)\theta.$$

La vitesse de glissement $\frac{NP}{\theta}$ *est donc égale au produit de la somme* $\omega + \omega'$ *des vitesses angulaires par la longueur* MI *de la normale commune, prise entre le point de contact* M *des deux profils et la ligne* OO′ *des centres*.

Nous retrouvons ainsi, par une analyse directe, les résultats obtenus dans la théorie générale des engrenages comme application des principes du mouvement relatif (§ 125).

Si au lieu de mettre en mouvement un marteau, la came soulevait un pilon, les résultats que nous venons d'obtenir seraient encore applicables ; il suffirait de supposer que le point O s'éloigne à l'infini, dans une direction AO perpendiculaire à la course du pilon.

Si l'on veut que le rapport des vitesses angulaires des deux corps en prise soit constant, il faut que le point I soit fixe sur la ligne OA ; c'est ce qui a lieu dans les engrenages.

Si l'on veut que le glissement soit constamment nul, il faut que le point de contact M des deux profils ne sorte pas de la ligne des centres ; alors le rapport des vitesses angulaires est nécessairement variable.

EXCENTRIQUE TRIANGULAIRE.

156. L'excentrique triangulaire (fig. 221) a pour objet de transformer un mouvement de rotation continu en un mouvement rectiligne alternatif interrompu par des repos.

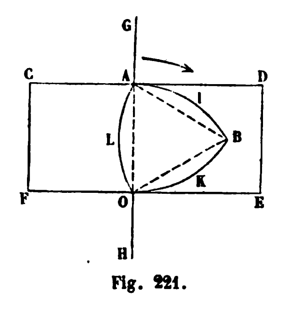


Fig. 221.

Cet appareil est représenté en OAB. Les trois distances OA, OB, AB, sont égales, de sorte que le triangle OAB est un triangle équilatéral. Des points O, A, B, comme centres, on décrit avec le côté du triangle pour rayon, les arcs de cercle AIB, BKO, OLA. L'excentrique est le solide prismatique droit qui a pour base le contour curviligne OLAIBKO. Il est mobile autour du point O, et il est entouré d'un cadre CDEF, qui est assujetti par les guides G et H à se mouvoir dans la direction GH, ou dans la direction HG.

La hauteur du cadre, CF, est égale à la corde OA des arcs de

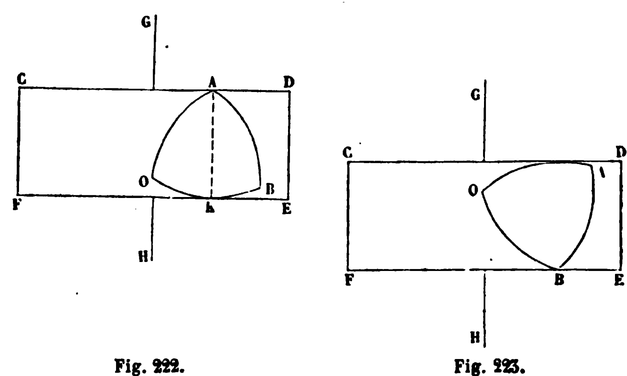


Fig. 222. Fig. 223.

cercle qui composent l'excentrique ou au rayon de ces arcs de cercle. Faisons tourner le triangle autour du point O dans le sens de la flèche. Dans ce mouvement, l'arc OKB (fig. 222) vient appuyer

sur le côté FE du cadre, qui descend dans le sens GH, en restant toujours tangent à cet arc. Pendant le même temps, le côté opposé du cadre, CD, passe constamment par le sommet A, car il est écarté du côté FE d'une quantité CF = OA = AK, distance du point de contact K au centre A de l'arc OB. Le mouvement continue ainsi jusqu'à ce que le contact entre FE et OB ait lieu en B. Alors commence une nouvelle période, dans laquelle (fig. 223) c'est le sommet B qui pousse le côté FE du cadre, pendant que l'arc AO glisse tangentiellement au côté opposé CD. Cette seconde période se termine quand le point de contact de OA et de CD est arrivé en O. Le sommet B cesse à ce moment de faire descendre le côté FE, et la rotation de l'excentrique autour du point O n'agit plus sur le cadre tant que le contact reste établi entre le côté FE et l'arc de cercle AB (fig. 224). Car la distance d'un point quelconque de cet arc au point O est toujours la même. Il y aura donc immobilité du cadre pendant tout le temps que l'excentrique met à passer de la position OBA à la position OB'B. Au delà, l'excentrique pousse le côté CD du cadre dans la direction HG, et le ramène dans sa position primitive, où il le laisse immobile pendant tout le temps que l'arc BA glisse sur le côté CD. En résumé, le tour entier de l'excentrique se décompose en six périodes égales, dont quatre pendant lesquelles le cadre est en mouvement, et deux pendant lesquelles il reste immobile.

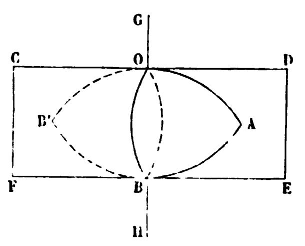


Fig. 224.

1re *période*. . . .	L'arc OB pousse FE. . . .	Course dans le sens GH.
2e *période*. . . .	Le sommet B pousse FE. .	
3e *période*. . . .	L'arc AB tangent à FE. .	Repos.
4e *période*. . . .	L'arc BO pousse CD. . . .	Course dans le sens HG.
5e *période*. . . .	Le sommet B pousse CD. .	
6e *période*. . . .	L'arc AB tangent à CD . .	Repos.

Chacune de ces périodes correspond pour l'excentrique à un déplacement angulaire de 60 degrés.

COURBE EN CŒUR.

157. La courbe en cœur est un excentrique destiné à transformer un mouvement de rotation uniforme en un mouvement rectiligne alternatif. On peut, par une disposition convenable de l'appareil, lui faire produire un mouvement rectiligne alternatif quelconque, uniforme, uniformément varié, uniforme avec in-

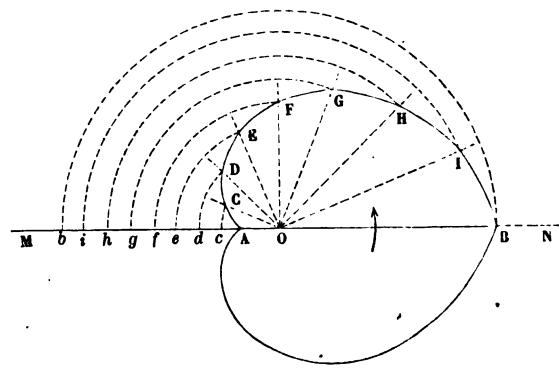


Fig. 225.

termittences. Supposons, par exemple, qu'on veuille obtenir un mouvement uniforme dans chaque partie de la course.

Par le centre O de la rotation (fig. 225), menons des droites OC, OD, OE, OF, OG, OH, OI, faisant entre elles et avec les droites OA, OB, des angles égaux à une fraction quelconque, $\frac{1}{8}$ par exemple, de deux angles droits. Le mouvement de la courbe en cœur se faisant dans le sens de la flèche, au bout de $\frac{1}{16}$ de tour, le point C sera parvenu en *c*, et par suite l'extrémité d'une pièce mobile assujettie à suivre la droite fixe MN sera poussée de la quantité A*c*. Au bout de $\frac{2}{16}$ de tour, elle sera poussée de même en *d*; au bout de $\frac{3}{16}$, en *e*, et ainsi de suite. Pour que le mouvement soit uniforme pendant

tout le demi-tour, il faut que les intervalles A*c*, *cd*, *de*... *ib*, soient égaux, A*b* représentant la course totale de la pièce mobile.

On devra donc partager A*b* en 8 parties égales; les divisions feront connaître les longueurs des rayons OC, OD, OE, OI, OB, et permettront de tracer la courbe AB.

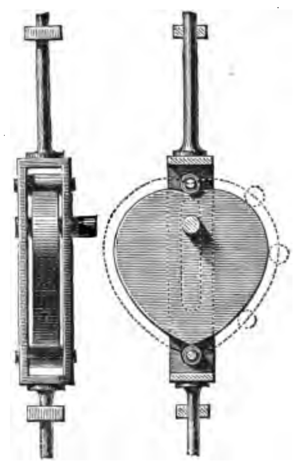


Fig. 226.

La figure 226 représente la disposition employée en pratique.

La courbe en cœur agit sur des rouleaux, qui ont un certain diamètre, et il faut par suite substituer au tracé géométrique que nous venons d'indiquer, une courbe parallèle, à une distance égale au rayon de ces rouleaux.

JOINT UNIVERSEL.

158. La transmission connue sous le nom de *joint universel* ou *joint hollandais* a pour objet de transformer un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un autre axe rencontrant le premier, de telle sorte que lorsque le premier arbre fait un tour entier, le second fasse aussi un tour entier.

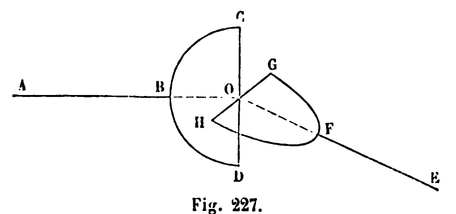


Fig. 227.

Soit AB le premier axe, et EF le second axe; les deux directions de ces axes se coupent en un point O.

La transmission s'opère en ajoutant aux deux arbres des *fourchettes* demi-circulaires CBD, GFH; la figure suppose que l'une, CBD, est tracée dans le plan du papier, tandis que l'autre, GFH,

est tracée dans un plan perpendiculaire au plan de la première; elles ont chacune la forme d'une demi-circonférence décrite du point O comme centre. Aux points C, D, G, H, les fourchettes sont percées pour recevoir les extrémités des branches d'un *croisillon* solide CGDH, dont les deux branches CD, HG, se coupent au point O à angle droit et en parties égales.

Si l'on fait tourner la fourchette CBD autour de l'axe AB, la branche CD du croisillon est entraînée dans ce mouvement ; les points C et D décrivent une circonférence dans un plan perpendiculaire à l'axe OA. L'angle COH reste toujours droit, et les points H et G de l'autre branche restent à des distances constantes des points C et D, tout en parcourant une circonférence dont le plan est normal à l'axe OE.

Lorsque l'extrémité C revient à son point de départ, le premier arbre a fait un tour entier, mais l'extrémité H est aussi revenue à son point de départ, et l'arbre EF a aussi fait un tour entier.

159. Proposons-nous d'étudier le mouvement du croisillon pendant la durée d'une révolution entière accomplie à la fois par les deux arbres.

Considérons (fig. 228) la sphère qui a le point O pour centre et la distance OC pour rayon. L'extrémité C de la fourchette CBD décrit sur cette sphère le grand cercle CMD, dont le plan est nor-

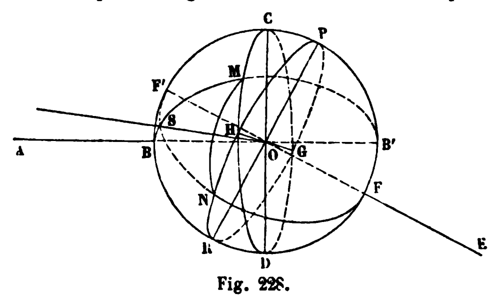


Fig. 228.

mal à l'axe AO; l'extrémité H de l'autre fourchette, que nous pouvons concevoir comme située sur la même surface sphérique, décrit sur cette surface une circonférence de grand cercle PNR dont le plan est normal à l'axe OE. Par hypothèse, la distance sphérique des deux points décrivants est constante et égale à un quadrant.

Si donc le premier point s'avance en M sur la première circonférence, on trouvera la position correspondante du second point en décrivant du point M comme centre, avec un rayon sphérique MN égal à un quadrant, un arc qui coupera le cercle PR au point N cherché. Par le point M et l'axe OA, faisons passer un plan; il coupera la surface de la sphère suivant le grand cercle BMB′, et l'arc BM de ce cercle sera la position prise par la demi-fourchette de l'arbre AB aboutissant au point M. De même, faisons passer un plan par le point N et l'axe OE; il coupera la sphère suivant le grand cercle FNF′, et l'arc FN représentera la position correspondante de la demi-fourchette de l'arbre OE. Or le plan BMB′ est normal au grand cercle CM, trajectoire de l'extrémité M du quadrant MN; de même le plan F′NF est normal en N à la trajectoire PNR de l'autre extrémité du même quadrant.

Ces deux plans se coupent suivant une droite qui passe par le centre O de la sphère, et par le point S, intersection des deux grands cercles tracés à sa surface. La droite OS est donc l'*axe instantané de rotation* du quadrant mobile MN, c'est-à-dire du croisillon. En d'autres termes, à chaque instant, le croisillon a pour axe instantané de rotation l'intersection des plans des deux fourchettes.

Le point S, intersection des deux grands cercles déterminés par ces plans, est mobile à la surface de la sphère; il coïncide avec le point F′ quand la figure est dans la position que nous lui avons attribuée en premier lieu; il coïncide avec le point B quand la fourchette CBD s'est avancée d'un angle droit. En définitive, le point S décrit à la surface de la sphère une courbe fermée comprise entre les points F′ et B; cette courbe peut servir de directrice à un cône dont le sommet est au point O, et qui contient la suite des axes instantanés du croisillon.

Pour avoir le rapport des vitesses angulaires des deux arbres à un même instant, il suffit d'observer que la vitesse angulaire du premier arbre AB est égale à la vitesse linéaire du point M, divisée par la distance MO, du point M à l'arbre, laquelle distance est constante; que de même la vitesse angulaire du second arbre est égale à la vitesse linéaire du point N divisée par la distance NO, qui est égale à MO. Les vitesses angulaires des deux arbres sont donc entre elles comme les vitesses linéaires des points M et N;

mais les points M et N, considérés comme appartenant au croisillon, ont des vitesses linéaires proportionnelles à leurs distances respectives à l'axe instantané OS. Le rapport des vitesses angulaires des deux arbres n'est donc pas constant. Dans la première position

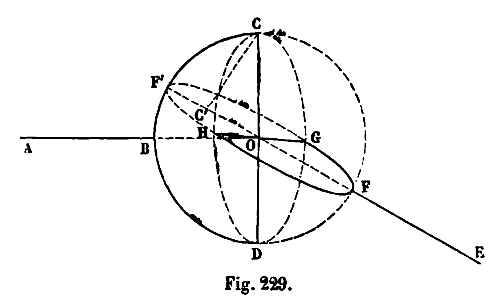


Fig. 229.

que nous avons supposée pour le joint, ce rapport est égal au rapport des distances des points C et H à l'axe OF' (fig. 229), et si nous abaissons CC' perpendiculaire sur OF', il sera exprimé par la fraction $\frac{CC'}{OH}$ qui est plus petite que l'unité.

Dans la position à 90° en avant de la première (fig. 230), l'axe AO est devenu l'axe instantané de rotation, et par suite le rapport des deux vitesses angulaires est exprimé par la fraction $\frac{HO}{RR'}$, rapport égal à l'inverse du précédent.

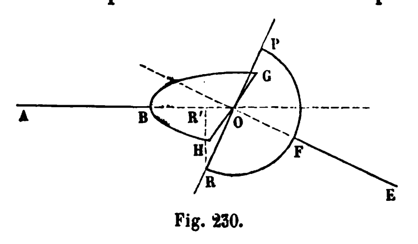


Fig. 230.

Le rapport des vitesses angulaires, qui est en moyenne égal à l'unité, varie entre ces deux limites.

On voit que les variations du rapport des vitesses sont d'autant moindres que le rapport $\frac{CC'}{OH}$ est plus voisin de l'unité, c'est-à-dire d'autant moindre que l'angle AOE des deux arbres est plus voisin de deux droits. La transmission est possible tant que l'angle AOE

est supérieur à un droit : de là le nom d'*universel* donné à ce système de joint. Mais lorsque l'angle des deux arbres est égal à un droit, la transmission cesse d'être admissible, car lorsque les axes OA, OE sont rectangulaires, les distances CC′ et RR′ sont nulles ; de sorte que si la vitesse angulaire de l'un des arbres est constante, la vitesse angulaire de l'autre devrait varier à chaque tour de zéro à l'infini, ce qui dénote une impossibilité.

160. Le joint universel est employé dans les ateliers où l'on doit installer un arbre tournant d'une très-grande longueur. L'ajustage d'un tel arbre sur un grand nombre de paliers serait extrêmement difficile, et demanderait une précision à peu près impossible à réaliser dans la pratique : un léger tassement, une petite déviation dans la pose, fausseraient la direction de l'arbre et donneraient naissance à des résistances presque insurmontables. On évite cet inconvénient en fractionnant l'arbre en tronçons qu'on réunit les uns aux autres par le système de fourchettes et croisillons. Les angles des deux tronçons successifs sont alors très-voisins de 180°, et les rapports des vitesses angulaires sont à très-peu près égaux à l'unité, comme si l'arbre était continu.

Les Hollandais se sont longtemps servis du joint universel pour rattacher la vis d'Archimède destinée aux épuisements de leurs polders à un arbre qu'un moulin à vent met en mouvement. Les variations du rapport de la vitesse des vitesses angulaires étaient sans inconvénient pour ce genre de travail. Elles empêcheraient, au contraire, d'employer le joint universel pour les transmissions à grande vitesse, lorsque l'angle des deux axes n'est pas très-ouvert.

DOUBLE JOINT DE HOOKE.

161. Lorsqu'on veut transmettre un mouvement de rotation d'un arbre à un autre arbre qui rencontre le premier sous un angle droit, le joint universel ne peut plus s'appliquer ; mais on peut couper les deux axes donnés par un axe auxiliaire faisant avec chacun d'eux des angles plus ouverts et appliquer le joint universel du premier axe à l'axe auxiliaire et de celui-ci au second axe donné.

De même, si l'angle des deux axes donnés, sans être rigoureusement droit, est voisin de l'angle droit, la transmission directe par joint universel serait défectueuse parce qu'elle donnerait lieu

à de trop fortes variations du rapport des vitesses. En employant un axe auxiliaire, on pourra ouvrir davantage les angles et réduire de beaucoup ces inégalités, et même, si l'on a soin que l'axe auxiliaire coupe les deux axes donnés sous des angles égaux, on pourra faire en sorte que les variations de vitesse produites par le premier joint soient exactement corrigées par les variations produites par le second, et que la transmission du premier arbre à l'autre soit rigoureusement uniforme. On obtient alors le double joint de Hooke.

Soient (fig. 231) AB, PN, les deux axes donnés, qui se coupent en R sous un angle obtus ARP quelconque. Prenons à partir du point R deux longueurs égales, RO = RO'; menons la droite OO', qui nous servira d'axe auxiliaire ; elle coupe les deux autres axes sous des angles AOO', OO'P, égaux chacun à la moitié de l'angle ARP augmentée d'un angle droit. Établissons un premier joint universel à la rencontre O des axes AO, OO'; un second joint à la rencontre O' des axes OO', O'P. Nous pouvons rendre parallèles les branches EF, KI des deux croisillons qui sont liés à l'arbre intermédiaire OO', ce qui revient à placer dans un seul et même plan les deux fourchettes de cet arbre.

Par le point R, conduisons un plan XY perpendiculaire à l'axe

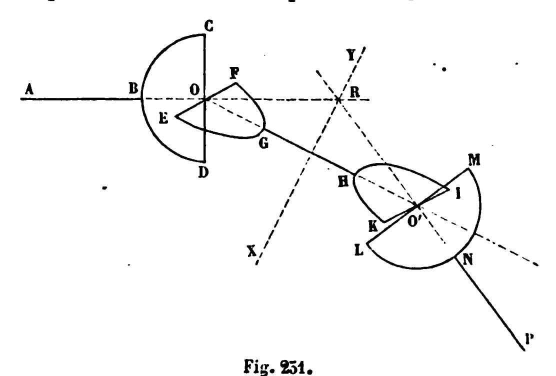


Fig. 231.

OO'. Il est facile de voir que dans toutes les positions du système, les deux joints O et O' seront symétriques par rapport à ce plan; le joint O' peut être considéré comme l'image du joint O, vue

dans un miroir plan, placé en XY perpendiculairement à la droite OO′. Lorsque le point C de l'arbre AB parcourt un certain arc, le point M de l'arbre PN parcourt un arc symétrique et par suite égal, de sorte qu'en définitive les vitesses angulaires autour des arbres AB, PN sont constamment égales, bien que la transmission s'opère de l'un à l'autre au moyen d'un arbre OO′ dont la vitesse angulaire est variable.

162. Ce résultat est indépendant de la longueur OO′, et il subsiste encore à la limite lorsque les deux points O et O′ viennent se confondre avec le point R. Pour rendre possible la transmission ainsi concentrée sur un même point, il faut supprimer les branches CD, LM, des croisillons, qui se gêneraient dans leur mouvement mutuel, et les remplacer par des circonférences massives décrite sur ces branches comme diamètres. Le mouvement des deux circonférences ne sera pas arrêté par leurs rencontres si leurs diamètres sont assez inégaux pour permettre à la plus petite de passer dans la plus grande.

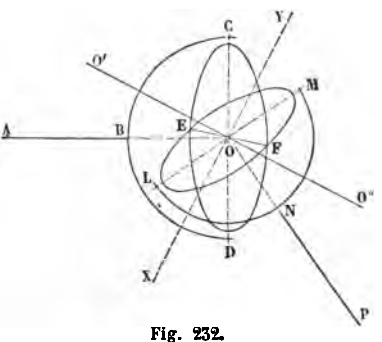


Fig. 232.

La transmission prend alors la forme suivante (fig. 232) :

AB, premier axe ;

CBD, première fourchette ;

PN, second axe ;

LNM, seconde fourchette, de rayon plus petit ;

O, intersection des deux axes ;

CEDF, circonférence massive, réunie à la première fourchette aux points C et D, mobile autour du diamètre CD, et tenant lieu de la branche CD du croisillon ;

LFME, circonférence massive de diamètre un peu plus petit que la précédente ; elle est rattachée à la seconde fourchette par les points L et M, autour desquels elle peut tourner, et à la première circonférence par les points E et F, situés à un quadrant

des points C et M. Elle tient lieu de la branche LM du second croisillon. L'axe EF, qui représente à la fois les branches EF et KI des deux croisillons de l'axe OO', peut être à volonté conservé en entier ou réduit à ses portions utiles, E et F.

La circonférence LFME doit être d'un diamètre assez petit pour passer dans le creux LNM de la seconde fourchette ; la seconde fourchette doit de même passer dans la circonférence CEDF, qui doit elle-même passer dans le creux CBD de la première fourchette.

Il ne reste rien de l'axe intermédiaire O'O''. Le mouvement des deux arbres est symétrique par rapport au plan XY, qui est normal à cet axe intermédiaire et qui partage en deux parties égales l'angle des deux axes donnés.

L'ensemble des deux circonférences concentriques massives CEDF, LFME, dont l'une est mobile autour d'une droite, CD, passant par son centre, et dont l'autre est mobile autour d'un dia-



Fig. 233.

mètre, EF, de la première, à angle droit sur la droite CD, constitue ce qu'on appelle l'*assemblage à la Cardan*.

On l'emploie dans la marine pour la suspension de la boussole (fig. 233), des baromètres, etc.; l'instrument ainsi suspendu peut osciller dans tous les sens ; il peut par suite rester dans la position verticale sans participer aux oscillations du bâtiment.

SUPPLÉMENT AU CHAPITRE VI

ENGRENAGE CYLINDRIQUE.

RELATION ENTRE LES RAYONS DE COURBURE DES DEUX PROFILS EN PRISE.

163. Soient O, O′, les circonférences primitives tangentes en A ; QP, PR les deux profils en prise, tangents en P. La droite AP sera normale à la fois aux deux profils ; et les centres de courbure des profils au point P seront situés quelque part sur cette droite, en C pour le profil PQ, en C′ pour le profil PR.

Prenons à partir du point A, sur les circonférences primitives, deux arcs infiniment petits, AB, AD, égaux entre eux. Joignons CB, OB, C′ D, O′ D; puis faisons tourner les deux roues de manière à amener à la fois les deux points B et D au point A. Les points C et C′ étant les centres de courbure des profils, les droites CB, C′ D sont encore normales à ces profils, et par suite, les points B et D se réunissant au point A, les droites CB, C′D viennent, en vertu du déplacement des deux roues, se placer en prolongement l'une de l'autre, suivant la normale commune aux deux profils dans leur nouvelle position.

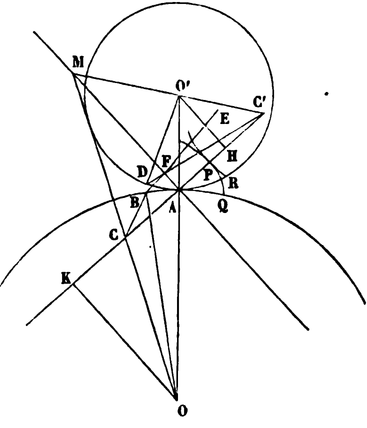


Fig. 234.

Le mouvement angulaire relatif de la roue O′ par rapport à la roue O est donc une rotation qui amène la normale DC′ en prolongement de la normale CB, c'est-à-dire une rotation mesurée par l'angle EFC′ de ces deux droites ; d'un autre côté, le déplacement angulaire relatif de la roue O′ par rapport à la roue O est la somme des angles aux centres BOA, DO′A; et comme dans le triangle CC′ F, l'angle

extérieur EFC′ est la somme des deux angles intérieurs opposés, C et C′, on a l'égalité

$$C + C' = BOA + DO'A.$$

Cette égalité établit une relation entre les rayons de courbure des deux profils.

Soient en effet $CP = \rho$, le rayon de courbure du profil PQ;

$C'P = \rho'$, le rayon de courbure du profil PR ;

$AP = p$, la distance du point de contact A des circonférences primitives au point de contact P des profils;

$AB = AD = s$, l'arc infiniment petit pris sur les circonférences primitives.

Élevons en A une perpendiculaire indéfinie AM sur la droite CC′; les droites CB, C′D coupent la droite AM sous un angle qui diffère infiniment peu de l'angle droit; elles coupent toutes deux la ligne AM en un même point F, projection commune sur AM des points B et D dont la distance est un infiniment petit du second ordre. Les angles infiniment petits BCA, DC′A, angles que nous avons désignés par les lettres C et C′, sont donc mesurés par les rapports $\frac{AF}{AC}$, $\frac{AF}{AC'}$. Mais $AC = \rho - p$, $AC' = \rho' + p$, et l'on a par conséquent les égalités

$$\text{angle } C = \frac{AF}{\rho - p}, \quad \text{angle } C' = \frac{AF}{\rho' + p}.$$

D'un autre côté l'angle BOA est égal à $\frac{AB}{R}$, et l'angle DO′A est égal à $\frac{AD}{R'}$, ou a $\frac{AB}{R'}$.

En définitive on a la relation

$$(1) \qquad \frac{AF}{\rho - p} + \frac{AF}{\rho' + p} = AB\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = s\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Abaissons des points O, O′, des perpendiculaires OK, O′H sur la normale commune CC′. Le triangle infinitésimal ABF est semblable aux triangles OAK et O′AH; car ces trois triangles sont rectangles, et de plus l'angle BAF est égal aux angles KAO, HAO′. On a donc la double proportion

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AK}{OA} = \frac{AH}{O'A} \text{ ou bien } = \frac{AK}{R} = \frac{AH}{R'}$$

Les termes de l'équation (1) sont, les uns relatifs à la roue O, les autres relatifs à la roue O'. Séparons ces termes dans chaque membre, il viendra :

$$\frac{AF}{\rho-p}-\frac{AB}{R}=\frac{AB}{R'}-\frac{AF}{\rho'+p}.$$

Divisons par AB, et remplaçons $\frac{AF}{AB}$ par $\frac{AK}{R}$ dans le premier membre, et par $\frac{AH}{R'}$ dans le second ; nous aurons

$$\frac{AK}{R}\times\frac{1}{(\rho-p)}-\frac{1}{R}=\frac{1}{R'}-\frac{AH}{(\rho'+p)R'},$$

ou bien

$$\frac{AK-\rho+p}{R(\rho-p)}=\frac{\rho'+p-AH}{R'(\rho'+p)}.$$

Renversant les fractions dans les deux membres, il vient

$$\frac{R(\rho-p)}{AK-\rho+p}=\frac{R'(\rho'+p)}{\rho'+p-AH};$$

or

$$AK-\rho+p=CK, \qquad \rho'+p-AH=C'H$$
$$\rho-p=AC, \qquad \rho'+p=AC'.$$

D'ailleurs aux facteurs R et R', on peut substituer les facteurs OK, O' H, qui leur sont proportionnels. L'équation précédente devient, après ces substitutions

$$\frac{OK\times AC}{CK}=\frac{O'H\times AC'}{C'H}.$$

Les droites OC, O'C', prolongées coupent la droite AM en deux points que nous désignerons par M et M'. Les triangles semblables MAC, OKC, donnent la proportion :

$$\frac{AM}{OK}=\frac{AC}{CK};$$

donc

$$AM=\frac{OK\times AC}{CK}.$$

On prouverait de même que

$$AM'=\frac{O'H\times AC'}{C'H}.$$

Donc enfin AM = AM', les points M et M' coïncident, et les trois droites AM, OC, O'C' concourent en un même point M.

De là résulte la construction suivante, pour déterminer le centre C', connaissant le centre C.

On joindra OC, et on cherchera le point de rencontre M de cette droite

avec la perpendiculaire AM élevée au point A sur la normale commune aux deux profils en prise; on joindra ce point au point O′, et la droite MO′ prolongée coupera la normale commune au centre C du second profil au point de contact P.

L'équation (1) est connue sous le nom de *formule de Savary*.

164. *Applications géométriques.* — 1° Supposons (fig. 235) que le profil PR se réduise à un point P, pris sur la circonférence O′. Le profil conjugué sera l'épicycloïde PQ décrite par le point P du cercle O′ roulant sur le cercle O.

Fig. 235.

La normale commune sera AP, et la droite AM, perpendiculaire au point A sur AP, rencontrera en un point du cercle O′ la droite PO′, qui remplace ici la droite C′O′, puisque le point P est à lui-même son centre de courbure.

Le centre de courbure de l'épicycloïde en P, sera le point C, intersection de la droite MO avec le prolongement de AP. — Cette construction donne comme cas particulier le rayon de courbure de la cycloïde (§ 107).

2° *Engrenage à flancs* (fig. 236). — Le rayon de courbure C′ P du flanc est infini; la droite C′ O′ est donc parallèle à AP, et le point M est situé à la rencontre de O′ C′ avec la perpendiculaire AM élevée sur AP. Le centre C est à l'inter-

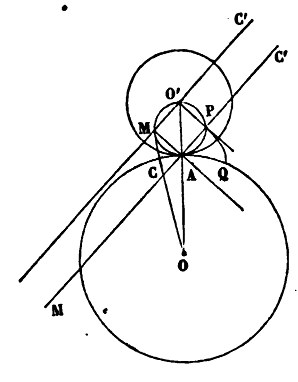
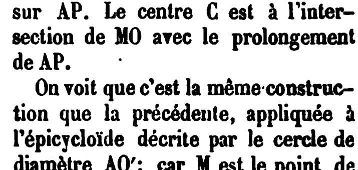


Fig. 236.



section de MO avec le prolongement de AP.

On voit que c'est la même construction que la précédente, appliquée à l'épicycloïde décrite par le cercle de diamètre AO′; car M est le point de rencontre de ce cercle avec le diamètre aboutissant au point P.

3° *Engrenage à développantes* (fig. 237). — Dans cet engrenage, les centres de courbure des développantes au point de contact des profils sont toujours en C et C′; on peut vérifier que les droites OC, AM, O′C′ perpendiculaires à une même droite CC′, concourent en un même point infiniment éloigné.

165. *Circonférence lieu des inflexions.*—Supposons que le profil tracé sur la roue O′ se réduise à un point (fig. 238); on devra faire $\rho'=0$, et l'équation de Savary nous donnera le rayon de courbure ρ de la trajectoire de tout point lié à la roue O′ quand elle roule sans glisser sur la roue fixe O.

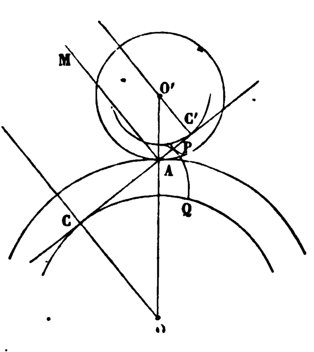


Fig. 237.

Cherchons quels sont les points de la roue O′ qui, à un même instant, décrivent des éléments de trajectoire dont la courbure soit nulle. Il faudra pour cela faire ρ infini dans l'équation

$$\frac{R(\rho-p)}{AK-\rho+p}=\frac{R'p}{p-AH},$$

où l'on a déjà fait $\rho'=0$.

Divisons par ρ les deux termes de la fraction du premier membre, et faisons ensuite ρ infini; les termes qui contiendront ρ en dénominateur deviendront nuls et disparaîtront, et l'on aura pour résultat :

$$\frac{R'p}{p-AH}=-R,$$

ou bien

$$p=\frac{AH\times R}{R+R'}.$$

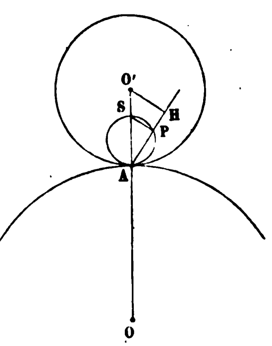


Fig. 238.

Menons PS perpendiculaire à AH.

Le rapport $\frac{p}{AH}$ ou $\frac{AP}{AH}$ est égal au rapport $\frac{AS}{O'A}$, et l'équation précédente nous montre que ce rapport est constant. Donc le point S est fixe sur la droite OO′, quel que soit le point P, et par suite le point P appartient à une circonférence décrite sur AS comme diamètre.

Cette circonférence est le lieu géométrique des points qui, à un instant donné, décrivent, dans le mouvement épicycloïdal de la figure O′, un élément dont la courbure est nulle; c'est donc le lieu des *points d'in-*

flexion de toutes les courbes épicycloïdales engendrées par les différents points de la figure O′ (1).

Si par exemple (fig. 239) on fait rouler le cercle de diamètre OA dans le cercle de rayon OA, on aura

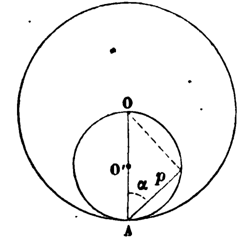


Fig. 239.

$$R = -OA$$

pour le cercle fixe, et

$$R' = O'A = +\frac{OA}{2}$$

pour le cercle mobile ; et par suite (fig. 240 et 241)

$$\frac{p}{AH} = \frac{AS}{O'A} = \frac{R}{R+R'} = \frac{-OA}{-OA+\frac{OA}{2}} = \frac{-OA}{-\frac{OA}{2}} = +2.$$

Donc AS $= 2\,O'A =$ OA, et l'on trouve pour la circonférence lieu des inflexions la circonférence de diamètre OA elle-même. Tous ses points décrivent, en effet, des lignes droites dans le mouvement épicycloïdal.

(1) On appelle *point d'inflexion* le point d'une courbe où le rayon de courbure est infini. Tous les points d'une droite peuvent être considérés d'après cette définition comme des points d'inflexion.

NOUVELLE CLASSIFICATION DES ORGANES DE TRANSMISSION DE MOUVEMENT

166. On adopte aujourd'hui la classification suivante, proposée pour la première fois par M. Willis.

	SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT.		SENS DE LA TRANSMISSION Périodiquement variable.
	Classe A. Rapport des vitesses constant.	Classe B. Rapport des vitesses variable.	Classe C. Rapport des vitesses constant ou variable.
Ier genre. Pièces en contact immédiat.	Engrenages, cames et pilons, vis et écrous.	Cames, excentriques, courbes en cœur.	Excentriques, etc.
IIe genre. Emploi d'un lien rigide.	Roues accouplées.	Joint universel.	Bielles et manivelles, parallélogrammes de Watt.
IIIe genre. Emploi d'un lien flexible.	Poulies et courroies.		

TRAINS ÉPICYCLOIDAUX.

167. On appelle *train épicycloïdal* un appareil de roues dentées dont la première est montée sur un axe fixe O, tandis que les suivantes sont montées sur des axes mobiles entraînés par un *bras* ou *châssis* OA, lequel tourne autour du point O. Si en même temps que la première roue O tourne, on imprime au bras OA un mouvement de rotation autour du point O, le mouvement effectif des roues du train sera un mouvement composé, résultant de leur liaison avec la roue O, et du mouvement du bras OA.

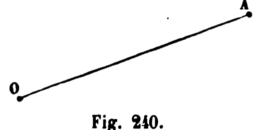


Fig. 240.

Appelons ω la vitesse angulaire de la première roue O, et ω' la vitesse angulaire d'une roue déterminée du train ayant son centre quelque part en A sur le bras OA, par rapport à des axes de direction constante menés dans son plan par le centre A de cette roue ; soit enfin u la vitesse angulaire du châssis autour du point A. La vitesse angulaire de

la roue A par rapport au châssis sera égale à $\omega' - u$ (§ 104 et 94); et la vitesse angulaire de la roue O par rapport au même châssis sera $\omega - u$; donc le rapport des vitesses angulaires simultanées des roues A et O, relatives à un même système OA, est égal à

$$\frac{\omega' - u}{\omega - u}.$$

Ce rapport est égal à la *raison* ε de l'équipage des roues dentées formé par la roue O et les roues qu'elle met en mouvement jusqu'à la roue A inclusivement (§ 128); le nombre ε ne dépend que du nombre de dents des roues constituant la transmission. On a donc

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{\omega' - u}{\omega - u},$$

Cette formule est générale, pourvu qu'on attribue aux vitesses angulaires ω, ω', u et à la *raison* ε les signes convenables.

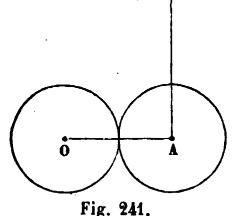


Fig. 241.

168. *Exemple. Engrenage planétaire de Watt.*—La première roue O et la dernière roue A ont le même nombre de dents et engrènent l'une avec l'autre : on fera donc $\varepsilon = -1$.

La seconde roue A est fixe à l'extrémité d'une bielle AB, qui se meut parallèlement à elle-même : donc $\omega' = 0$. Le mouvement de la bielle transmet au *lien* OA autour du point O un mouvement de rotation dont la vitesse angulaire est u. Il en résulte pour la roue O une vitesse angulaire ω donnée par la formule (1) en y faisant $\omega' = 0$ et $\varepsilon = -1$; on en déduit $\omega = 2u$.

La roue O fait donc deux tours quand le rayon OA en fait un.

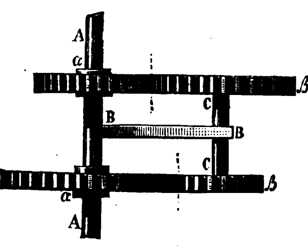


Fig. 242.

169. *Autre exemple de train épicycloïdal plan.* — Deux roues dentées α, α', indépendantes l'une de l'autre, sont montées sur un même arbre AA. Ces roues engrènent l'une avec la roue β, l'autre avec la roue β', qui sont solidaires l'une de l'autre par l'intermédiaire de l'axe CC, lequel est entraîné par le *bras* BB, mobile autour de l'arbre AA. On imprime à l'arbre AA, et

par suite au bras BB, une vitesse angulaire u; on imprime en même temps une vitesse angulaire ω à la roue α autour du même arbre. On demande quelle sera la vitesse angulaire ω' de la roue α'.

Appliquons la formule générale (1) au train épicycloïdal formé par les roues α, β, et le bras BB; ω'' étant la vitesse angulaire du système rigide β, β', par rapport à des axes mobiles de direction constante, et ε la *raison* de l'engrenage (α, β), on aura

$$\varepsilon = \frac{\omega'' - u}{\omega - u}.$$

La même formule peut s'appliquer au train formé par les roues α', β' et le bras BB, et si nous appelons ε' la *raison* de l'engrenage $(\alpha' \ \beta')$, nous aurons de même

$$\varepsilon' = \frac{\omega'' - u}{\omega' - u}.$$

Divisons ces deux équations l'une par l'autre; nous éliminons ω'', et il vient

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\omega' - u}{\omega - u},$$

ou bien

$$\varepsilon\,\omega - \varepsilon'\,\omega' = (\varepsilon - \varepsilon')\,u,$$

équation qui donne ω' en fonction de ω et de u. Supposons par exemple que la roue α ait 10 dents, et la roue β, 15 dents; que la roue α' ait 25 dents et la roue β', 12 dents; il en résultera

$$\varepsilon = -\frac{10}{15}, \quad \varepsilon' = -\frac{25}{12}.$$

Les raisons sont négatives parce que l'engrenage est extérieur. Supposons en outre que la roue α reste immobile, ce qu'on exprimera en faisant $\omega = 0$. Il viendra entre les vitesses angulaires ω' et u la relation

$$\frac{25}{12}\omega' = -\left(\frac{10}{15} - \frac{25}{12}\right) u = + \frac{255}{15 \times 12} u,$$

donc

$$\frac{\omega'}{u} = + \frac{255}{25 \times 15} = + \frac{17}{25}.$$

La roue α' et le bras BB tournent donc dans le même sens.

MOUVEMENTS DIFFÉRENTIELS.

170. On appelle *mouvement différentiel* un mouvement lent obtenu par la composition de deux mouvements en sens contraires.

Le *treuil différentiel* (fig. 243) consiste en un arbre tournant hori-

zontal, AB, sur lequel sont montés bout à bout deux cylindres C et D, de rayons différents. La corde E attachée par ses deux extrémités à la surface de ces cylindres s'enroule sur le cylindre D et se déroule du cylindre C à mesure qu'on tourne la manivelle M. Elle soutient un poids P par l'in-

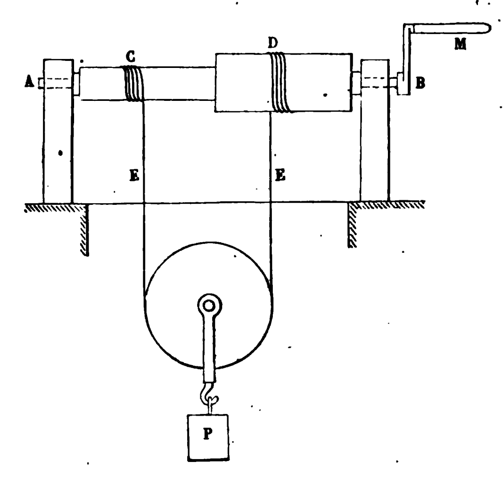


Fig. 243.

termédiaire d'une poulie. Soit r le rayon du cylindre C, et R le rayon du cylindre D; pour un tour de manivelle opéré dans le sens convenable, le cylindre D enroulera une longueur de corde sensiblement égale à $2\pi R$; en même temps, le cylindre C déroulera une longueur de corde égale à $2\pi r$; le poids P montera de la différence de ces deux longueurs ou de $2\pi(R-r)$; le mouvement du poids P sera donc identique à celui qu'il prendrait si l'on employait un treuil de rayon $R-r$. On verra plus tard l'utilité de cette disposition.

La *vis différentielle* de Prony (fig. 244) repose sur un principe analogue.

La vis V traverse deux écrous E, F; l'écrou E est fixe; l'écrou F est mobile le long d'une rainure I.

La surface de la vis est garnie en AB d'un filet dont nous désignerons le pas par h, de telle sorte que quand on fait faire un tour entier à la vis dans le sens convenable, la vis avance dans son écrou vers la gauche d'une quantité égale à h.

La région CD de la vis est garnie d'un filet dont le pas h' est moindre que h; l'écrou F est creusé suivant le même tracé. Si donc la vis

n'avait aucun mouvement longitudinal, un tour entier de la vis ferait avancer vers la droite l'écrou mobile F de la quantité h'. Mais la vis

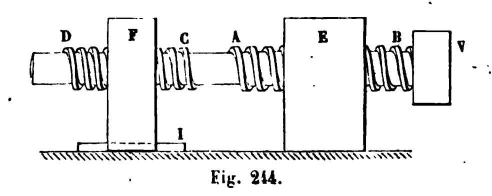


Fig. 244.

s'avançant vers la gauche de la quantité h et entraînant l'écrou dans ce mouvement, l'écrou n'avance en définitive vers la gauche que de la différence $h - h'$, c'est-à-dire qu'il se déplace comme l'écrou mobile d'une vis fixe qui aurait un pas égal à cette différence.

Les trains épicycloïdaux permettent de réaliser de véritables mouvements différentiels.

DESCRIPTION DE L'ELLIPSE AU MOYEN D'UN MOUVEMENT CONTINU.

171. Soient a et b les demi-axes de l'ellipse ;

O le centre de l'ellipse, OX la direction du grand axe, OY, perpendiculaire à OX, la direction du petit axe.

Par le point O, menons une droite quelconque OM, et prenons sur cette droite une longueur $OM = \frac{a+b}{2}$, et une autre longueur $ON = \frac{a-b}{2}$.

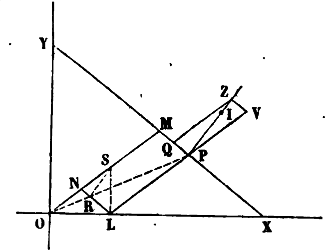


Fig. 245.

Du point N comme centre avec un rayon égal à ON, décrivons un arc de cercle qui coupera OX en un second point L ; nous aurons NL = ON. Joignons NL, et achevons le parallélogramme LNMP en menant par L et M des parallèles à NL, NM. Je dis que le point P appartient à l'ellipse cherchée.

En effet, prolongeons MP jusqu'à la rencontre des axes OX,

OY aux points X et Y; nous aurons, à cause des parallèles MX, NL, la proportion

$$\frac{MX}{NL}=\frac{OM}{ON}.$$

Or NL = ON par construction; donc MX = OM. Par conséquent le point M est le milieu de la droite XY, et cette droite, double de la droite constante MO, a une longueur constante et égale à $a+b$. Le point P, situé à une distance MP = NO constante du point milieu M de XY, est fixe sur cette droite. Le lieu des points M peut donc être considéré comme le lieu des positions d'un point déterminé d'une droite de grandeur constante XY, dont les deux extrémités glissent sur les deux axes OX, OY rectangulaires. On sait que ce lieu est une ellipse, et il est facile de voir que cette ellipse a pour demi grand axe a, et pour demi petit axe b.

Dans la pratique on réalisera le parallélogramme NMPL avec quatre règles articulées, dont l'une sera prolongée d'une quantité NO = NL ; il suffira de maintenir le point O par un pivot à la rencontre des axes, et de faire glisser le sommet L le long de OX, pour qu'un crayon placé à l'articulation P trace l'ellipse; cette construction sera plus commode que l'emploi de la droite mobile XY, parce qu'elle exige moins d'espace. Elle a un autre avantage, c'est de donner immédiatement le tracé de la normale en chaque point de la courbe, et de permettre de tracer du même mouvement continu une courbe parallèle et équidistante.

Joignons OP, qui coupe LN en R; je dis d'abord que le point R est fixe sur le côté NL. En effet, les triangles semblables ONR, OMP donnent la proportion

$$\frac{NR}{MP}=\frac{ON}{OM};$$

les trois derniers termes de la proportion étant constants, le premier l'est aussi. Donc le point R décrit une ellipse semblable à celle que décrit le point P, et semblablement placée par rapport au centre O. Les normales à ces ellipses aux points R et P sont donc parallèles. Par le point L élevons sur OX une perpendiculaire LS, qui coupe OM en S; nous aurons NS = NL = ON, et le point S, intersection des normales OS et LS, menées aux lignes décrites par les extrémités N et L de la droite mobile NL, est le

centre instantané de rotation de cette droite (§ 80). Par suite, la droite RS est la normale à la courbe décrite par le point R. La normale à l'ellipse décrite par le point P s'obtiendra donc en menant par ce point une parallèle à RS.

Cela étant, prenons arbitrairement un rapport K quelconque, et portons sur PM à partir du point P une quantité

$$PQ = NR \times K = \frac{MP \times ON}{OM} \times K = \frac{\frac{a-b}{2} \times \frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} \times K = \frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{a+b} \times K,$$

et sur le prolongement de LP à partir du point P, une quantité $PV = NS \times K = \frac{a-b}{2} \times K$; achevons le parallélogramme QPVZ dont les côtés seront constants; la diagonale PZ de ce parallélogramme sera parallèle à RS. En effet, les triangles PQZ et RNS ont deux côtés parallèles chacun à chacun, dirigés dans le même sens et proportionnels; le troisième côté PZ de l'un est donc parallèle au troisième côté RS de l'autre.

Donc PZ est la normale cherchée à l'ellipse décrite par le point P.

La longueur PZ de la diagonale du parallélogramme PQVZ varie à mesure que le parallélogramme se déforme : il faut par conséquent que la règle PZ, pincée fortement au point P, puisse couler sans résistance dans l'articulation Z, qui l'empêche seulement de dévier d'un côté ou de l'autre. Pour décrire une courbe équidistante à l'ellipse, il suffira de fixer sur la règle PZ un crayon I à une distance PI du point P égale à l'intervalle qu'on veut laisser entre les deux courbes.

La construction qui vient d'être indiquée convient surtout au tracé des ellipses sur les chantiers de construction. Les crayons que l'on emploie pour le tracé des épures sont généralement taillés en biseau et non en pointe; on devra donc les fixer sur la règle PZ de manière que la direction du biseau fasse un angle droit avec la direction de cette règle : alors on sera certain que, dans toutes les positions du parallélogramme, le tranchant du crayon sera tangent à la courbe qu'il décrit.

RECHERCHE DES COMPOSANTES PARALLÈLES AUX AXES, DE L'ACCÉLÉRATION CENTRIFUGE COMPOSÉE.

172. Lorsque nous nous sommes occupés de l'accélération dans le mouvement relatif (§ 105), nous avons désigné par j_e, j_r et j_c les trois accélérations qui se composent pour former l'accélération totale du mouvement absolu, et qui sont, l'une, j_e, l'accélération d'entraînement, l'autre, j_r, l'accélération du mouvement relatif et la troisième enfin, j_c, l'*accélération complémentaire*, ou *centrifuge composée*. Nous avons vu que cette dernière était perpendiculaire à l'axe instantané de rotation du système de comparaison et à la vitesse relative; qu'elle avait pour valeur

$$2\omega v'_r,$$

en désignant par v'_r la projection de la vitesse relative v_r sur un plan normal à l'axe instantané; qu'enfin son sens était le sens dans lequel la rotation instantanée tend à déplacer l'extrémité de la vitesse relative.

Cette définition est bien complète, mais elle est, en général, d'une application peu commode; on la simplifie en décomposant l'accélération j_c parallèlement à trois axes rectangulaires, parallèlement auxquels on décompose de même la rotation instantanée ω et la vitesse relative v_r. Le problème à résoudre est donc le suivant : étant données les trois composantes

$$p,\ q,\ r, \text{ de } \omega,$$

et les trois composantes

$$v_x,\ v_y,\ v_z \text{ de } v_r,$$

trouver les composantes de l'accélération $2\omega v'_r$ projetée sur les mêmes axes.

Soit (fig. 246) M le point mobile;

PP' l'axe instantané de rotation qu'on peut toujours supposer passer par le point M, en introduisant dans le mouvement d'entraînement une translation convenable;

MA une droite qui représente en grandeur et en direction la vitesse relative, v_r.

Prenons sur l'axe PP′, à partir du point M et dans le sens où l'observateur devrait s'étendre le long de l'axe pour voir la rotation s'effectuer de gauche à droite, une quantité MB qui représentera en grandeur et en direction la vitesse angulaire ω.

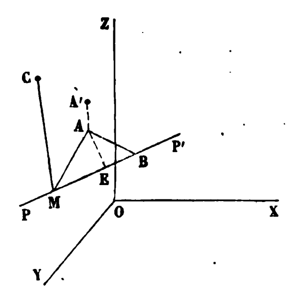


Fig. 246.

La rotation ω tendant à déplacer dans le sens AA′ l'extrémité de la vitesse relative, élevons au point M une perpendiculaire MC au plan AMB, et menons cette perpendiculaire dans le sens AA′; puis prenons sur cette droite une longueur MC égale au produit $2\omega v'_r$; pour obtenir v'_r, il suffit d'abaisser du point A une perpendiculaire AE sur l'axe PP′; nous aurons $AE = v'_r$; et l'accélération cherchée sera égale par conséquent à

$$2 \times MB \times AE,$$

c'est-à-dire au quadruple de la surface du triangle AMB. Nous devrons donc porter sur MC une longueur représentant, à une échelle arbitraire, quatre fois l'aire du triangle AMB. C'est cette longueur MC que nous avons à projeter sur les trois axes.

Avant de faire cette opération, nous démontrerons un lemme qui nous sera très-utile dans la suite du cours.

173. *Lemme.*—Étant donnés (fig. 247) deux plans ABC, ABD qui se coupent suivant la droite AB, on trace dans le premier, ABC, un contour fermé MN, et l'on projette orthogonalement ce contour en M′N′ sur le second plan ABD. L'aire plane M′ N′ est la projection de l'aire plane MN.

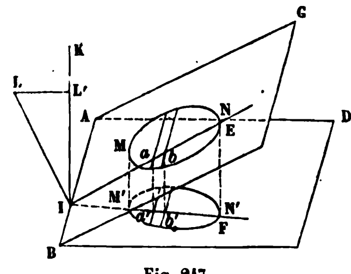


Fig 247.

Par un point I quelconque, on mène une droite IL normale au plan ABC, et une droite IK normale au plan ABD; puis on prend sur la première

droite une longueur IL proportionnelle à l'aire MN tracée dans le premier plan. On projette orthogonalement cette longueur en LL' sur la droite IK. Je dis que IL' est proportionnelle à l'aire M'N', c'est-à-dire qu'on a la proportion

$$\frac{\text{aire MN}}{\text{aire M'N'}} = \frac{\text{IL}}{\text{IL'}}.$$

En effet, partageons l'aire MN en tranches infiniment minces et d'égale épaisseur, par des droites menées dans le plan ABC parallèlement à l'intersertion AB des deux plans. Nous pourrons former (fig. 248) un ensemble de rectangles inscrits dans le contour, et un ensemble de rectangles faisant saillie sur le contour, de telle sorte que l'aire du contour soit évidemment comprise entre la somme des aires des rectangles intérieurs, et la somme des aires des rectangles saillants. La différence entre ces deux sommes peut d'ailleurs être rendue aussi petite qu'on voudra en réduisant l'intervalle des lignes parallèles, ou en augmentant le nombre.

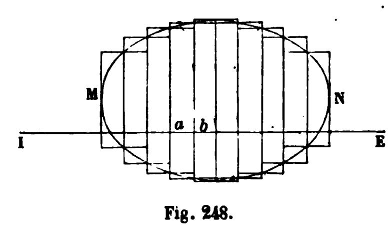


Fig. 248.

Or projetons la figure sur le plan ABD; nous formerons de même deux séries de rectangles : la première, comprenant des rectangles inscrits dans le contour M'N'; la seconde, les rectangles en saillie sur ce contour ; deux rectangles correspondants pris, l'un dans le plan ABC, l'autre dans le plan ABD, ont des dimensions égales dans le sens parallèle à l'intersection commune AB; ils sont donc entre eux comme les dimensions perpendiculaires à AB. Coupons les deux plans donnés par le plan des deux droites IL, IK, lequel est normal à l'intersection commune AB; l'intersection IE avec le premier plan rencontrera à angle droit toutes les parallèles menées dans ce plan à la droite AB, et deux parallèles consécutives intercepteront sur cette droite IE un segment *ab* (fig. 248) égal à leur intervalle commun. De même la droite IF (fig. 247) rencontrera les deux parallèles correspondantes du plan BAD, et elles y intercepteront un segment *a'b'*, qui sera la projection de *ab*. Deux rectangles corres-

pondants sont donc entre eux comme $\frac{ab}{a'b'}$; il en est de même de leurs sommes, et de même aussi des limites de ces sommes, c'est-à-dire des aires du contour MN et de sa projection.

On a donc

$$\frac{\text{aire MN}}{\text{aire M'N'}}=\frac{ab}{a'b'}.$$

Mais les triangles semblables Iaa', Ibb', donnent la proportion

$$\frac{ab}{a'b'}=\frac{Ia}{Ia'};$$

de plus le triangle ILL' est semblable au triangle Iaa', car les angles en I de ces deux triangles sont égaux, et, ils sont rectangles en L' et en a'; donc enfin

$$\frac{Ia}{Ia'}=\frac{IL}{IL'}$$

et par suite

$$\frac{\text{aire MN}}{\text{aire M'N'}}=\frac{IL}{IL'},$$

ce qu'il fallait démontrer

Il résulte de cette proposition que *pour projeter orthogonalement une droite sur une autre, on peut projeter une aire proportionnelle à la droite et prise dans un plan normal à cette droite, sur un plan normal à l'autre.*

174. Au lieu de projeter la droite AC (fig. 247) sur les axes OX, OY, OZ, nous pourrons donc projeter sur les plans YOZ, ZOX, XOY le quadruple de l'aire du triangle MAB, et cette opération est facile.

Par le point O (fig. 249), menons une droite OR égale et parallèle à MB (fig. 246) puis une droite OS égale et parallèle à MA, et projetons sur le plan XOY le point S en s, le point R en r.

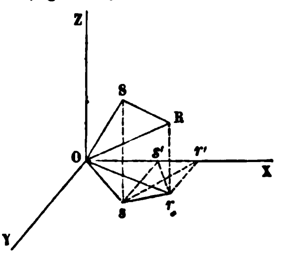


Fig. 249.

Projetons ensuite s et r en s' et r' sur l'axe OX. Nous aurons

$$p=Or',\qquad q=r'r,$$
$$v_x=O's,\qquad v_y=s's.$$

Le triangle à évaluer est Ors, projection de ORS, qui est égal à MBA. Joignons $s'r$; la surface Ors est égale à la différence du quadrilatère $Osrs'$ et du triangle $Os'r$. Mais le quadrilatère $Osrs'$ est la somme du triangle $Os's$ et du triangle $ss'r$, lequel est équivalent au triangle $ss'r'$ puisqu'ils ont même base ss', et que leurs sommets sont sur une parallèle rr' à la base.

Donc

$$\begin{aligned} \text{triangle } Osr &= \text{triangle } Oss' + \text{triangle } s'sr' - \text{triangle } Os'r \\ &= \text{triangle } Osr' - \text{triangle } Os'r. \end{aligned}$$

Le triangle Osr' a pour mesure la moitié du produit de sa base Or' par sa hauteur ss', ou $\frac{1}{2}\, pv_y$; le triangle $Os'r$ a pour mesure la moitié du produit de sa base Os' par sa hauteur rr', ou $\frac{1}{2}\, pv_x$; donc enfin

$$\text{triangle } Osr = \tfrac{1}{2}(pv_y - qv_x);$$

le quadruple de ce triangle est donc égal à

$$2\,(pv_y - qv_x);$$

telle est la valeur de la composante de l'accélération j_c suivant l'axe OZ, perpendiculaire au plan XOY; ce que nous exprimerons en écrivant

$$j_{c,z} = 2(pv_y - qv_x).$$

175. Cette formule est générale eu égard aux signes. Pour le vérifier, supposons successivement que l'axe instantané soit parallèle à l'axe OX, puis à l'axe OY.

Dans le premier cas (fig. 250), nous supposerons la vitesse relative

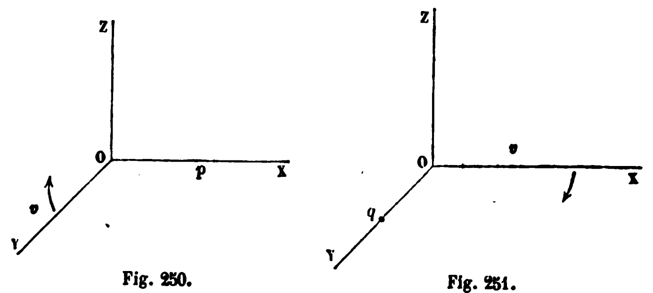


Fig. 250. Fig. 251.

dirigée parallèlement à l'axe OY, et dans le second (fig. 251) à l'axe OX.

Dans le premier cas, il faudra faire dans la formule $q=0$ et $v_x=0$; elle se réduira donc à

$$j_{c,z}=2pv_y,$$

ce qui est d'accord avec la règle; car si p et v_y sont positifs, la rotation instantanée tend à faire tourner l'extrémité de la vitesse relative dans le sens YZ, et par suite l'accélération complémentaire a la direction positive OZ. On vérifierait de même la formule pour les autres signes que peuvent avoir les facteurs.

Dans le second cas, il faudra faire $p=0$, $v_y=0$, et par suite, on aura $j_{c,z}=-2qv_x$, ce qu'il est encore facile de vérifier en faisant successivement q et v_y positifs et négatifs.

Le signe de la formule, vérifié dans ces cas particuliers, peut être admis dans le cas général en vertu du principe de continuité.

En raisonnant de même pour les deux autres plans, on parviendra aux formules suivantes, que l'on peut déduire l'une de l'autre par de simples permutations de lettres :

$$j_{c,x}=2(qv_z-rv_y);$$
$$j_{c,y}=2(rv_x-pv_z);$$
$$j_{c,z}=2(pv_y-qv_x).$$

Pour former ces équations, on peut écrire sur une même ligne les trois composantes de la rotation instantanée dans l'ordre p, q, r, mais en récrivant la première à la suite de la troisième; audessous on écrira dans le même ordre les trois composantes de la vitesse relative v_x, v_y, v_z qu'on fera suivre de même de la première, comme si ces composantes étaient écrites en cercle; on obtiendra ainsi le tableau suivant :

$$\begin{matrix} p & q & r & p \\ v_x & v_y & v_z & v_x \end{matrix}$$

On formera les *différences des produits en croix*,

$$pv_y-qv_x,$$
$$qv_z-rv_y,$$
$$rv_x-pv_z,$$

des termes de cette double suite; on les multipliera par 2, et les produits représenteront chacun une des composantes de l'ac-

célération j_{c_i}; chaque produit contient les composantes, parallèles à deux des axes coordonnés, de la rotation et de la vitesse relative et représente la projection de l'accélération j_c sur le troisième axe.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Un courrier part à midi du point A. Un second courrier part à midi 30 minutes du point B. Tous deux suivent la droite AM. Celui qui part du point A fait 15 kilomètres à l'heure. L'autre a une vitesse de

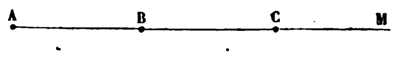


Fig. 252.

$3^m,30$ par seconde. On demande de déterminer le point C où le premier courrier atteindra le second, et de trouver l'heure de la rencontre, sachant que la distance AB est de 27 kilomètres.

2. L'aiguille des heures et celle des minutes sont ensemble sur midi. Trouver les heures où elles sont encore superposées ; — les heures où elles font l'une avec l'autre un angle droit ; — un angle de 120°.

3. L'aiguille des heures, celle des minutes et celle des secondes (dans une horloge à secondes) sont ensemble sur midi. Déterminer les heures de la rencontre de l'aiguille des heures avec celle des secondes : — les heures de la rencontre de l'aiguille des minutes avec celle des secondes ; — les heures de rencontre des trois aiguilles. — Démontrer que jamais les extrémités des trois aiguilles, supposées d'une égale longueur, ne peuvent former les sommets d'un triangle équilatéral.

4. Le globe terrestre fait un tour entier autour de son axe en vingt-quatre heures, et le méridien terrestre est une circonférence de 40,000,000 de mètres de longueur. Déterminer la vitesse linéaire de points pris à la surface du globe sur l'équateur ; — à 30° de latitude ; — à 45° ; — à 60°.

5. Un observateur placé sur le haut d'une tour laisse tomber en dehors de la tour une petite pierre qui vient frapper le sol. Il note le temps écoulé entre le moment où il a abandonné la pierre et le moment où il entend le bruit. On demande la hauteur de la tour, en tenant

compte du temps que le son aura employé pour remonter du sol à l'oreille de l'observateur. Le temps observé est de 4 secondes, et la vitesse du son dans l'air est de 340 mètres par seconde.

6. Une roue d'engrenage ayant 120 dents, engrène avec un pignon qui en a 8; sur l'axe du pignon est montée une seconde roue qui porte 75 dents et qui engrène avec un pignon qui en porte 10; ce second pignon fait corps avec une troisième roue, portant 54 dents, laquelle engrène avec une roue calée sur un arbre tournant, et portant 20 dents. On fait faire à la première roue un tour et demi par minute; on demande 1° la vitesse angulaire du dernier arbre, 2° le nombre de tours qu'il effectuera par minute.

7. La circonférence primitive d'une roue dentée a un diamètre de $1^m,25$; la circonférence conjuguée a un diamètre de $0^m,15$; sur l'axe de cette circonférence est montée une seconde roue dont la circonférence primitive a un diamètre de $0^m,60$ et qui engrène avec une roue calée sur un arbre tournant; la circonférence primitive de cette dernière roue a un diamètre de $0^m,22$. — On imprime à la première roue un déplacement angulaire de 30°. Trouver la longueur de l'arc décrit par les points de la dernière circonférence primitive. Chercher quels nombres de dents on peut attribuer aux différentes roues de cet équipage de roues dentées.

8. Sur l'arbre AA, est montée une roue M qui engrène avec une roue N, montée sur un axe BB. En un point donné de l'un des rayons de

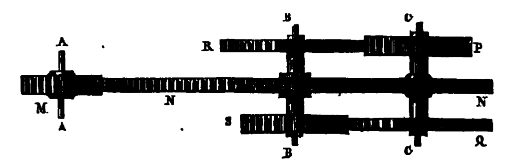


Fig. 253.

cette roue N, est monté un axe CC, lequel est entraîné dans le mouvement de la roue N et porte deux roues solidaires P et Q. La roue Q engrène avec une roue fixe S, montée sur l'axe BB. La roue P engrène avec la roue R, montée également sur l'axe BB.

On demande de déterminer le rapport des vitesses angulaires des roues M et R, connaissant les nombres

$$m, n, p, q, r, s,$$

des dents que portent respectivement les roues

M, N, P, Q, R, S.

Les trois roues N, R, S, bien que montées sur le même axe géométrique, sont indépendantes les unes des autres.

Appliquer la formule à $m=30$, $n=24$, $p=61$, $q=43$, $r=19$, $s=37$.

Résoudre le même problème en introduisant une nouvelle roue faisant corps avec la roue M, engrenant avec la roue S et possédant m' dents.

9. Une roue d'engrenage A est fixe; autour de son axe tourne le *bras porte-train* BB. Ce bras porte deux axes α et β parallèles au premier.

Sur l'axe α est montée une roue C, qui engrène d'un côté avec la roue fixe A, et de l'autre avec trois roues folles P, Q, R, montées sur le même axe β.

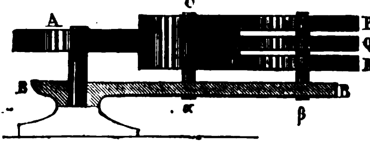


Fig. 254.

La roue A porte n dents;
La roue P en porte $n+1$;
La roue Q, n;
Et la roue R, $n-1$.

Le nombre des dents de la roue C est indifférent.

Déterminer les vitesses angulaires prises par les trois roues P, Q, et R, lorsque l'on imprime au bras porte-train une vitesse ω autour de l'axe fixe. (*Paradoxe de Fergusson.*)

10. Le mouvement est donné à la *machine à aléser* par la roue G,

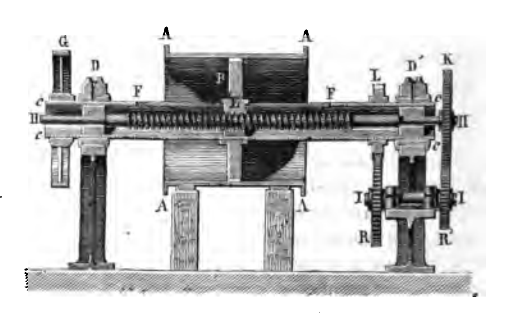


Fig. 255.

montée sur l'arbre creux *cccc*. L'outil B, est monté sur cet arbre, à l'intérieur duquel passe une vis HH, prise à ses extrémités dans des

paliers fixes. L'outil est rattaché à un écrou mobile E, qui embrasse cette vis, et qui sort du cylindre creux par la fente FF.

Le cylindre creux porte une roue d'engrenage L, qui engrène avec la roue R; celle-ci fait corps par l'intermédiaire de l'axe II, avec une roue R′ qui engrène avec la roue K, donnant la rotation à la vis. Il résulte de ces dispositions que quand on fait tourner la roue G, l'outil B tourne au dedans du cylindre et avance en même temps d'une certaine quantité.

On donne le pas h de la vis, le nombre n des dents de la roue K, et le nombre $n-1$ des dents de la roue L; on sait, d'ailleurs, que les roues R et R′ ont le même nombre de dents.

On demande de déterminer la quantité dont s'avance latéralement l'outil au dedans du cylindre par chaque tour de la roue G.

11. Une circonférence C roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence fixe S. Un point de la première décrit dans ce mouvement une épicycloïde intérieure. Démontrer qu'on peut engendrer la même épicycloïde par un point d'une seconde circonférence C′, roulant à l'intérieur de la circonférence S.

12. Démontrer qu'on peut toujours, étant données deux lignes tracées dans un plan, faire décrire la première par un point attaché invariablement à une troisième ligne roulant sans glisser sur la seconde.

13. Construire la troisième ligne du problème précédent, en admettant que les deux premières sont deux droites qui se coupent.

14. Construire la courbe que décrit le foyer d'une parabole roulant sans glisser sur une droite fixe. Mener la tangente à la courbe ainsi décrite, et trouver son centre de courbure en un point donné.

15. Construire la courbe décrite par un point mobile, connaissant la valeur constante de la projection de sa vitesse sur une droite horizontale, et sachant que la vitesse de sa projection sur une verticale croit proportionnellement au temps. Mener la tangente à la trajectoire, et construire le centre de courbure un en point donné.

16. Un point mobile se meut à la surface de la terre, supposée sphérique, avec une vitesse v donnée et dans une direction donnée. Déterminer l'*accélération complémentaire* due au mouvement de rotation du globe, et trouver les valeurs des composantes de cette accélération projetée sur la verticale du lieu, sur la tangente au méridien et sur la tangente au parallèle.

17. Deux excentriques circulaires égaux A et A′, sont calés sur un même arbre tournant O (fig. 256). Les barres AB, A′B′ de ces deux excentriques sont articulées aux points B et B′ avec une *coulisse* en arc de cercle, dans laquelle est engagé le *coulisseau* C. Le point B′ est en outre assujetti à rester à une distance invariable LB′ d'un point fixe L. Le coulis-

seau C fait corps avec une pièce CDE suspendue au point fixe E et mobile autour de ce point. Elle commande par son extrémité D une tige DNP,

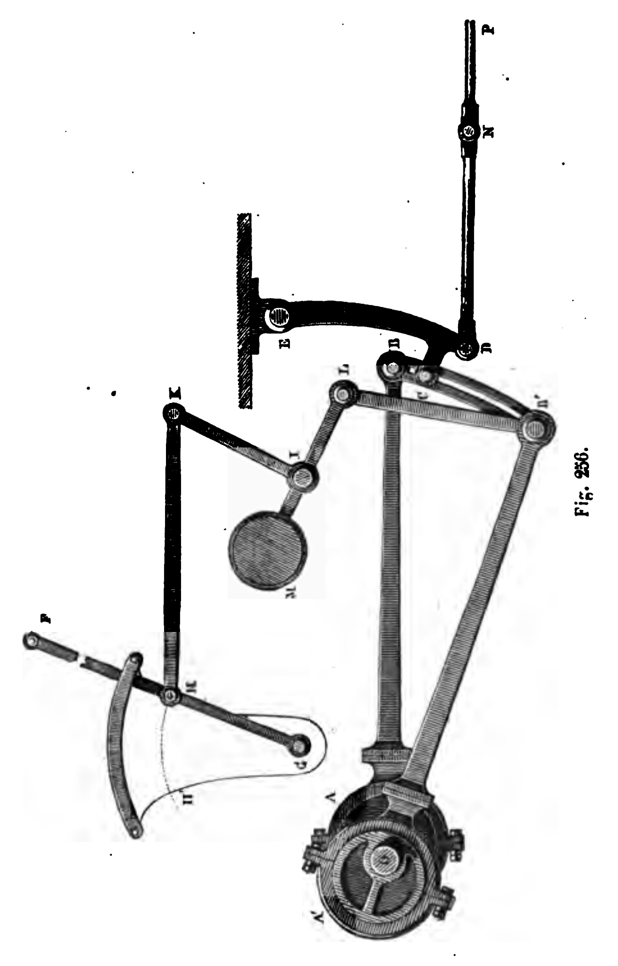


Fig. 256.

articulée aux points D et N, et destinée à transmettre à un *tiroir* un mouvement rectiligne alternatif. — On peut modifier l'amplitude de ce

mouvement en relevant plus ou moins la coulisse BB′; pour cela, on n'a qu'à déplacer le levier FG, appelé *levier de changement de marche*, en faisant décrire à l'articulation H, autour du centre G, une portion plus ou moins grande de l'arc de cercle HH′. La tringle HK transmet ce déplacement au levier coudé KIL, mobile autour de l'*arbre de relevage* I. Une double *bielle de relevage*, LB′, rattache l'extrémité L′ de ce levier à l'articulation B′ de la coulisse. Le contre-poids M, qui équilibre les pièces mobiles dans toutes leurs positions, est destiné à faciliter ces manœuvres. — On demande :

1° De démontrer que pour une position donnée du point L, le centre instantané de rotation de la coulisse BB′ est à l'intersection de la droite LB′, avec la droite menée par le centre O et le point de concours des axes des deux barres d'excentrique AB, A′ B′;

2° De trouver les limites d'excursion d'un point P, pris sur la tige NP, et de construire la courbe correspondante des espaces, pour différentes positions du levier de changement de marche, FG.

(Coulisse de Stephenson, pour la distribution de la vapeur dans les locomotives.)

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

CINÉMATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

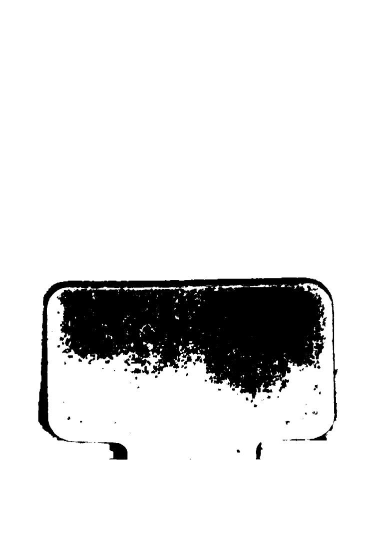
S.

on parallèles.

atif en un

re des

e. . .



NOUVELLES PUBLICATIONS

RÉDIGÉES CONFORMÉMENT AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE 1886

POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Tous les volumes ci-après sont imprimés dans le format in-18 jésus et cartonnés)

LANGUE FRANÇAISE.

Grammaire de l'enseignement secondaire spécial, par M. Sommer. 1 vol. 1 fr. 50.

Lectures ou dictées, par M. Lelion-Damiens, économe du collège Rollin (année préparatoire et 1re année). 3 vol. :

Tome I, contrées agricoles, 1 fr 50.

Tome II, contrées commerciales. 1 fr. 50.

Tome III, contrées industrielles.

Premiers principes de style et de composition, par M. Pellissier, professeur au collège Chaptal (2e année). 1 vol. 1 fr. 50 c.

Morceaux choisis des classiques français (prose et vers) adaptés au précédent ouvrage. 1 vol. 1 fr. 50 c.

Principes de rhétorique française, par M. Pellissier (3e année). 1 vol. 3 fr.

Morceaux choisis des classiques français (prose et vers), adaptés au précédent ouvrage. 1 vol. 2 fr. 50 c.

Textes classiques de la littérature française, extraits des grands écrivains français, avec notices biographiques et bibliographiques, appréciations littéraires et notes explicatives, par M. Demogeot (3e année). 2 vol. 6 fr.

GÉOGRAPHIE ET HISTOIRE.

Géographie de la France, par M. Richard Cortambert (année préparatoire). 1 vol. 1 fr.

Atlas correspondant. Grand in-8o. (12 cartes) 2 fr. 50 c.

Géographie des cinq parties du monde, par M. E. Cortambert (1re année). 1 vol. 1 fr. 50 c.

Atlas correspondant. Grand in-8o.

Géographie agricole, industrielle, commerciale et administrative de la France et de ses colonies, par le même auteur (2e année). 1 vol. 2 fr.

Atlas correspondant. Grand in-8o.

Géographie commerciale des cinq parties du monde, par M. Richard Cortambert (3e année). 1 vol.

Atlas correspondant. Grand in-8o.

Simples récits d'histoire de France, par MM. Ducoudray et Feillet (année préparatoire). 1 vol. avec gravures. 2 fr. 50 c.

Simples récits d'histoire ancienne, grecque, romaine et du moyen âge, par les mêmes (1re année). 1 vol. 3 fr. 50 c.

Histoire de la France depuis l'origine jusqu'à la Révolution française, et grands faits de l'histoire moderne de 1453 à 1789, par M. Ducoudray (1re année). 1 vol. 3 fr. 50 c.

Histoire de France et histoire générale, depuis 1789 jusqu'à nos jours, par le même auteur (3e année). 1 vol. 3 fr. 50 c.

Histoire moderne et contemporaine, depuis 1643 jusqu'à nos jours (4e année). 1 vol. 4 fr. 50 c.

ARITHMÉTIQUE ET COMPTABILITÉ.

Éléments d'arithmétique, par M. Pichot, professeur au lycée Louis-le-Grand (année préparatoire et 1re année). 1 vol. 2 fr. 50 c.

Arithmétique élémentaire, par M. Bovier-Lapierre, professeur à l'École normale de Cluny (année préparatoire et 1re année). 1 vol. 2 fr. 50 c.

Cours d'arithmétique commerciale, par M. E. Jeanne, professeur à l'École supérieure du Commerce (2e année). 1 vol. 3 fr.

Cours de comptabilité, par M. Courcelle-Seneuil (1re, 2e, 3e et 4e années). 4 vol. Chaque volume, 4 fr. 50.

GÉOMÉTRIE, TRIGONOMÉTRIE, ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Géométrie, par M. Saint-Loup :

Année préparatoire (géométrie plane). 1 fr.

Première année (géométrie plane). 2 fr.

Deuxième année (géom. dans l'espace). 1 fr. 50.

Principes d'algèbre, par MM. H. Sonnet et E. Jeanne (3e et 4e années). 1 vol. 2 fr. 50 c.

Cours élémentaire de géométrie descriptive, par M. Kiaes (3e et 4e années). 2 vol. 5 fr.

Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne, par M. Bovier-Lapierre (4e année). 1 vol. 2 fr. 50.

Notions élémentaires de trigonométrie rectiligne, par M. Bezodis (4e année). 1 vol. 1 fr. 50 c.

Notions élémentaires sur les courbes usuelles, par le même (4e année). 1 vol. 2 fr.

HISTOIRE NATURELLE, PHYSIQUE, CHIMIE, MÉCANIQUE, COSMOGRAPHIE.

Éléments de zoologie, par M. Gervais, professeur à la Faculté des sciences de Paris :

Notions préliminaires (1re année, 1re partie). 1 vol. 2 fr. 50.

Mammifères (année préparatoire et 1re année, 2e partie). 1 vol. 2 fr. 50 c.

Oiseaux, Reptiles, Batraciens, Poissons et Animaux sans vertèbres (2e année). 1 v. 2 fr. 50

Anatomie et physiologie des animaux (3e ann.). 1 vol. 2 fr. 50 c.

Zoologie appliquée à l'agriculture, à l'industrie et à l'hygiène (4e année). 1 vol.

Éléments de botanique, 3 volumes :

Année préparatoire, 1re et 2e années. 2 vol.

Troisième et quatrième années (*classification et usages des plantes*). 1 vol. 3 fr.

Éléments de géologie (année préparatoire), par M. Raulin. 1 vol. 1 fr. 50 c.

Première année (*Géologie de la France*), par le même. 1 vol. 2 fr. 50 c.

Deuxième et troisième années, par le même. 2 vol.

Quatrième année, par MM. Marié Davy et Sonrel. 1 vol.

Cours élémentaire de physique, par M. Gossin :

Première année. 1 vol. 2 fr.

Deuxième année. 1 vol. 3 fr.

Troisième année. 1 vol. 3 fr.

Quatrième année.

Éléments de chimie, par MM. Dehérain et Gossin :

Première année. 1 vol. 1 fr. 50.

Deuxième année. 1 vol. 2 fr. 50.

Troisième année. 1 vol. 3 fr.

Quatrième année.

Cours de mécanique, par M. Éd. Collignon.

Troisième année. 1 vol. 3 fr. 50 c.

Quatrième année. 1 vol.

Éléments de cosmographie, par M. Amédée Guillemin (3e année). 1 vol. 3 fr. 50.

LÉGISLATION, MORALE, INDUSTRIE, ÉCONOMIE POLITIQUE.

Éléments de législation usuelle, par M. Delacourtie, avocat, docteur en droit (3e année). 1 vol. 3 fr.

Éléments de législation commerciale et industrielle, par le même auteur (4e année). 1 vol. 3 fr.

Éléments de morale, par M. A. Franck, membre de l'Institut (3e et 4e années). 1 vol.

Les grandes inventions scientifiques et industrielles, par M. L. Figuier (4e année). 1 vol. 1 fr. 50 c.

Cours d'économie rurale, industrielle et commerciale, précédée de Notions d'économie politique, par M. Levasseur (4e année). 1 vol.

Imprimerie générale de Ch. Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris. — Mai.